

~~21/24~~ OF 1914

ANALELE UNIVERSITATII BUCURESTI

MATEMATICĂ - MECANICĂ

ANUL XVIII — Nr. 1 — 1969

ANALELE UNIVERSITĂȚII BUCUREȘTI

1989



MATEMATICĂ—MECANICĂ

ANUL XVIII — Nr. 1 — 1969

MATEMATICĂ—MECANICĂ



COMITETUL DE REDACȚIE

Redactor responsabil: Acad. prof. *M. Nicolescu*.

Membrii: Acad. prof. *Caius Iacob*; acad. prof. *Gh. Vrănceanu*; prof. dr. docent *Gh. Galbură*; prof. dr. *G. Ciucu*; prof. dr. docent *R. Cristescu*; prof. dr. docent *C. Foiș*; prof. dr. docent *Cabiria Andreian Cazacu*.

Secretar: Conf. dr. *P. P. Teodorescu*.



REDACȚIA

ANALELE UNIVERSITĂȚII BUCUREȘTI

B-dul Gh. Gheorghiu-Dej nr. 64

Telefon 16.01.87/5

SUMAR

	Pag.
N. BONCIOCAT și T. POSTELNICU: Model matematic pentru studiul enzimelor a două centre active	9
N. I. DINULESCU: Asupra unor formule de refracție	15
LAZĂR DRAGOȘ: Observații asupra problemei surselor în mecanica fluidelor....	21
IOANA DRĂGHICI: Asupra grupurilor liniare comutative și local tranzitive cu 2, 3 și 4 parametri	29
GH. GRIGORE: Reprezentarea unor spații reticulate local convexe	47
VRATISLAV HORÁLEK: Asupra unor proprietăți ale nașterii neomogene, ale imigrației și a proceselor moarte	53
ARISTIDE LEONTE: Produs semiinterior slăbit.....	61
V. OLARIU: Iteratele de un ordin oarecare ale sistemelor diferențiale liniare și de ordinul I	67
S. PETHÖ: Determinarea numărului elementelor de probă și a limitelor de siguranță dintr-o mulțime de repartiție logaritmică	75
P. P. TEODORESCU: Vibrațiile mediilor continue elastice.....	81
NICOLAE TIȚA: În legătură cu bazele de subspații.....	131
F. WEILING: Contribuții la istoria statisticii și aplicării ei în biologie în timpul secolului trecut	137

STAFF

104	THE DIRECTOR: Mr. J. H. ...
105	THE DEPUTY DIRECTOR: Mr. ...
106	THE CHIEF CLERK: Mr. ...
107	THE CHIEF OF POLICE: Mr. ...
108	THE CHIEF OF FIRE: Mr. ...
109	THE CHIEF OF HEALTH: Mr. ...
110	THE CHIEF OF EDUCATION: Mr. ...
111	THE CHIEF OF AGRICULTURE: Mr. ...
112	THE CHIEF OF MINES: Mr. ...
113	THE CHIEF OF LABOR: Mr. ...
114	THE CHIEF OF FINANCE: Mr. ...
115	THE CHIEF OF LEGAL: Mr. ...
116	THE CHIEF OF PUBLIC RELATIONS: Mr. ...
117	THE CHIEF OF RESEARCH: Mr. ...
118	THE CHIEF OF STATISTICS: Mr. ...
119	THE CHIEF OF TRAINING: Mr. ...
120	THE CHIEF OF WELFARE: Mr. ...

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Н. БОНЧЬКАТ и Г. ПОСТЕЛНИКУ: Математическая модель для изучения энзимов двух активных центров	9
Н. И. ДИНУЛЕСКУ: О некоторых формулах рефракции	19
ЛАЗЭР ДРАГОШ: О задаче источников в механике жидкости	27
ИОАНА ДРЭГИЧЬ: О линейных коммутативных локально-транзитивных груп- пах с 2, 3 и 4 параметрами	45
Г. ГРИГОРЕ: Отображение некоторых ретикулированных локально выпуклых пространств	51
ВРАТИСЛАВ ХОРАЛЕК: К вопросу о некоторых свойствах нетождественного возникновения эмиграции и мёртвых процессов	53
АРИСТИДЕ ЛЕОНТЕ: Полувнутреннее ослабленное произведение	65
В. ОЛАРИУ: Ичиралы любого порядка линейных дифференциальных систем 1-го порядка	73
С. ПЕТХО: Определение количества пробных элементов и лимитов безопасно- сти в облагораживающей массе логаритмических нормалей	75
П. П. ТЕОДОРЕСКУ: Вибрации непрерывных упругих сред	130
НИКОЛАЕ ТИЦА: О базисах из подпространств	136
Ф. ВЕЙЛИНГ: К истории статистики и её применения в биологии на протяже- нии прошлого столетия	137

COLLEGE

175	THE UNIVERSITY OF MICHIGAN LIBRARY
176	THE UNIVERSITY OF MICHIGAN LIBRARY
177	THE UNIVERSITY OF MICHIGAN LIBRARY
178	THE UNIVERSITY OF MICHIGAN LIBRARY
179	THE UNIVERSITY OF MICHIGAN LIBRARY
180	THE UNIVERSITY OF MICHIGAN LIBRARY
181	THE UNIVERSITY OF MICHIGAN LIBRARY
182	THE UNIVERSITY OF MICHIGAN LIBRARY
183	THE UNIVERSITY OF MICHIGAN LIBRARY
184	THE UNIVERSITY OF MICHIGAN LIBRARY
185	THE UNIVERSITY OF MICHIGAN LIBRARY
186	THE UNIVERSITY OF MICHIGAN LIBRARY
187	THE UNIVERSITY OF MICHIGAN LIBRARY
188	THE UNIVERSITY OF MICHIGAN LIBRARY
189	THE UNIVERSITY OF MICHIGAN LIBRARY
190	THE UNIVERSITY OF MICHIGAN LIBRARY
191	THE UNIVERSITY OF MICHIGAN LIBRARY
192	THE UNIVERSITY OF MICHIGAN LIBRARY
193	THE UNIVERSITY OF MICHIGAN LIBRARY
194	THE UNIVERSITY OF MICHIGAN LIBRARY
195	THE UNIVERSITY OF MICHIGAN LIBRARY
196	THE UNIVERSITY OF MICHIGAN LIBRARY
197	THE UNIVERSITY OF MICHIGAN LIBRARY
198	THE UNIVERSITY OF MICHIGAN LIBRARY
199	THE UNIVERSITY OF MICHIGAN LIBRARY
200	THE UNIVERSITY OF MICHIGAN LIBRARY

SOMMAIRE

	Page
N. BONCIOCAT et T. POSTELNICU: Modèle matématique pour l'étude des enzymes à deux centres actifs	9
N. I. DINULESCU: Sur quelques formules de réfraction.....	19
LAZĂR DRAGOȘ: Observation sur le problème des sources en mécanique des fluides	27
IOANA DRĂGHICI: Sur les groupes linéaires commutatifs et localement transitifs à 2, 3 et 4 paramètres.....	46
GH. GRIGORE: Représentation de certains espaces linéaires réticulés localement convexes	51
VRATISLAV HORÁLEK: On some properties of nonhomogenous birth, immigration and death processes	53
ARISTIDE LEONTE: Weakened semi-inner product	65
V. OLARIU: Les itérées d'un ordre quelconque des systèmes différentiels linéaires et d'ordre I	73
S. PETHÖ: Die bestimmung der probeelementenzahl und der zuverlässigkeitsgrenzen aus einer menge lognomaler vereilung.....	75
P. P. TEODORESCU: Les vibrations des milieux continus élastiques	130
NICOLAE ȚIȚA: Sur les bases des sous-espaces.....	136
F. WEILING: Beiträge zur geschichte der Statistik und ihrer Anwendung in der Biologie während des vergangenen Jahrhunderts	137

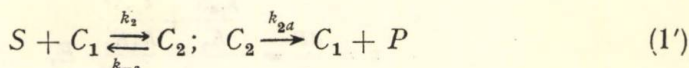
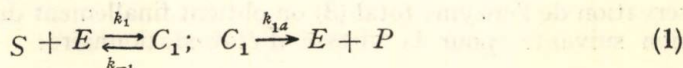
SOMMAIRE

174	M. BENOIST ET A. FLEURY. - Notes mathématiques pour l'étude des
2	surfaces à courbure constante
18	A. I. DUBINSKY. - Sur quelques formes de l'équation
27	LAPLACE. - Sur les propriétés des surfaces à courbure constante
37	M. A. DUBINSKY. - Sur les propriétés des surfaces à courbure constante
40	de la 1 ^{re} et 2 ^{de} espèce
51	M. GORDON. - Sur les surfaces à courbure constante
53	M. A. DUBINSKY. - Sur les propriétés des surfaces à courbure constante
57	de la 1 ^{re} et 2 ^{de} espèce
73	M. A. DUBINSKY. - Sur les propriétés des surfaces à courbure constante
75	de la 1 ^{re} et 2 ^{de} espèce
100	M. A. DUBINSKY. - Sur les propriétés des surfaces à courbure constante
102	de la 1 ^{re} et 2 ^{de} espèce
107	M. A. DUBINSKY. - Sur les propriétés des surfaces à courbure constante
109	de la 1 ^{re} et 2 ^{de} espèce

MODÈLE MATHÉMATIQUE POUR L'ÉTUDE DES ENZYMES À DEUX CENTRES ACTIFS *

N. BONCIOCAT ET T. POSTELNICU

On sait [1] que le modèle cinétique d'action enzymatique pour un enzyme à deux centres actifs est



où E , S , C_1 , C_2 , P sont respectivement: l'enzyme libre, le substrat, le complexe enzyme-substrat avec un centre de l'enzyme occupé, le complexe-enzyme-substrat avec les deux centres de l'enzyme occupés, le produit formé. Les constantes k_1 , k_{-1} , k_2 , k_{-2} , k_{1a} , k_{2a} sont des constantes de vitesse de réaction. Le système d'équations différentielles qui décrivent la dépendance en fonction du temps des concentrations du substrat, du produit et des deux complexes intermédiaires est:

$$\frac{dS}{dt} = -k_1SE + k_{-1}C_1 + k_2SC_1 + k_{-2}C_2 \quad (2)$$

$$\frac{dP}{dt} = k_{1a}C_1 + k_{2a}C_2$$

$$\frac{dC_1}{dt} = k_1SE - (k_{1a} + k_{-1})C_1 - (k_2SC_1 - k_{-2}C_2) + k_{2a}C_2$$

$$\frac{dC_2}{dt} = k_2SC_1 - (k_{-2} + k_{2a})C_2$$

où cette fois-ci par E , S , C_1 , C_2 , P on a noté les concentrations respectives (en moles/l), et la concentration de l'enzyme total sera donnée par

$$E_t = E + C_1 + C_2 \quad (3)$$

* Communication présentée au III-ème Colloque de la „Théorie des Probabilités“, Braşov, 2-7 septembre, 1968.

A cause des difficultés d'intégration du système (2) on utilise dans les études de cinétique enzymatique le concept „d'état stationnaire“ vérifié expérimentalement. Par état stationnaire on comprend l'état où les concentrations des complexes intermédiaires peuvent être pratiquement considérées comme invariables dans le temps, c'est à dire

$$\frac{dC_1}{dt} = \frac{dC_2}{dt} = 0 \quad (4)$$

et la durée de cet état dépend du couple enzyme-substrat formant l'objet de l'étude. Dans l'état stationnaire le décroissement de la concentration du substrat dans l'unité de temps est égal à l'accroissement de la concentration du produit dans l'unité de temps et il exprime la vitesse v (moles/l. sec) d'état stationnaire. Les constantes k_{1a} , k_{2a} , s'appellent constantes de „turnover“ et elles expriment numériquement la contribution des deux chaînes de réaction du modèle (1), (1'), à la valeur de la vitesse d'état stationnaire lorsque les concentrations des complexes sont unitaires.

En utilisant les conditions d'état stationnaire (4) et l'équation de conservation de l'enzyme total (3) on obtient finalement du système (2), l'expression suivante, pour la vitesse d'état stationnaire:

$$v = \frac{dP}{dt} = \frac{\frac{k_{1a}S}{K_1} + \frac{k_{2a}S^2}{K_1K_2}}{1 + \frac{S}{K_1} + \frac{S^2}{K_1K_2}} E_t \quad (5)$$

où

$$K_1 = \frac{k_{-1} + k_{1a}}{k_1}, \quad K_2 = \frac{k_{-2} + k_{2a}}{k_2} \quad (6)$$

formules bien connues dans la littérature de spécialité [1]. Les constantes K_1 , K_2 sont constantes de type Briggs-Haldane, correspondant aux deux chaînes de réactions du modèle (1), (1').

Dans cet exposé les auteurs se sont proposés d'élaborer un modèle statistique qui puisse permettre l'estimation des grandeurs $k_{1a} E_t$, $k_{2a} E_t$, K_1 , K_2 et le calcul de leurs intervalles de confiance.

*

* *

On vérifie de (5) que la courbe $v = v(S)$ a un maximum lorsque $k_{2a} < k_{1a}$. Ce cas est important pour la pratique parce qu'il correspond à une inhibition de l'enzyme par son propre substrat. Dans ce qui suit nous supposons comme réalisée cette condition, ainsi que $K_2 \gg K_1$. Quant à la dernière condition, on voit de (6) qu'elle a lieu si par exemple $k_2 \ll k_1$ c'est à dire que l'occupation du deuxième centre s'opère plus lentement que l'occupation du premier centre, et les sommes $k_{-1} + k_{1a}$, $k_{-2} + k_{2a}$ sont comparables comme

valeur. En revenant à l'expression (5) de v on voit que dans le domaine des petites concentrations du substrat, elle peut être exprimée par:

$$\frac{1}{v} \approx \frac{1}{v^*} = \frac{1}{k_{1a}E_t} + \frac{K_1}{k_{1a}E_t} \frac{1}{S}. \quad (7)$$

Des expressions (5) et (7) on constate que pour les concentrations $S = 0$ et $S = K_1 k_{2a} / (k_{1a} - k_{2a})$ on obtient les mêmes valeurs pour les vitesses, à savoir $v = v^* = 0$, respectivement $v = v^* = k_{2a}E_t$.

De même $v > v^*$ dans le domaine de la concentration

$$0 < S < K_1 k_{2a} / (k_{1a} - k_{2a}).$$

En plus, on obtient

$$v - v^* < \frac{K_1}{K_2} v^* \quad (8)$$

tenant donc compte de la condition $K_1 \ll K_2$ nous obtenons

$$v - v^* \ll v \quad (8')$$

ce qui montre que du moins dans le domaine de concentration indiqué ci-dessus, l'ajustement linéaire des données, expérimentales, en raison de (7) est permis. En calculant donc l'équation de la droite de régression de sélection, on obtient les estimations $1/a$, b/a , pour $k_{1a}E_t$, K_1 où.

$$a = \bar{y} - bx, \quad b = \frac{[xy]}{[x^2]} = \frac{\Sigma y(x - \bar{x})}{\Sigma (x - \bar{x})^2} \quad (9)$$

et

$$Y = a + bX \quad (9')$$

est l'équation de la droite de régression de sélection. On a noté $X = \frac{1}{S}$,

$Y = \frac{1}{v}$ et on a supposé que la réalisation expérimentale des diverses concentrations de substrat n'est pas affectée d'erreurs, la seule variable aléatoire étant donc Y dont on suppose qu'elle est normale, ce qui peut être réalisé expérimentalement, par un choix adéquat de la façon d'obtenir les inverses des vitesses d'état stationnaire (par exemple que $1/v$ résulte numériquement comme temps nécessaire pour consommer un volume fixe, réduit, de réactif de titrage).

On observe de (9) que a et b s'expriment comme fonctions linéaires des observations y , supposées avec des erreurs normalement distribuées et elles estiment les paramètres α et β correspondant à toute la population et pour lesquels:

$$E(b) = \frac{1}{[x^2]} \Sigma (x - \bar{x}) E(y) = \frac{1}{[x^2]} \Sigma (x - \bar{x}) (\alpha + \beta x) = \beta \quad (10)$$

$$E(a) = E(\bar{y} - \beta x) = E\left[\frac{\Sigma(\alpha + \beta x)}{N}\right] - b\bar{x} = \alpha.$$

Supposons que la variation par rapport à la droite de régression de sélection puisse être considérée homogène, c'est à dire:

$$V(y_i) = s^2 \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

où par s^2 on a noté un carré moyen d'erreurs avec f degrés de liberté résulté à la suite d'une analyse de variance de la régression [2]. Ceci permet de tester la signification de la pente et la dispersion des réponses moyennes par rapport à la droite de régression, c'est-à-dire tester la valabilité de la relation (7) dans le domaine de concentration utilisé dans l'expériment.

Une fois s^2 déterminé, on obtient $V(a)$, $V(b)$ et $\text{cov}(a, b)$ à savoir:

$$\begin{aligned} V(b) &= s^2 v_{11}; \quad v_{11} = \frac{1}{[x^2]} \\ V(a) &= s^2 v_{22}; \quad v_{22} = \frac{1}{N} + \frac{\bar{x}^2}{[x^2]} \\ \text{cov}(a, b) &= s^2 v_{12}; \quad v_{12} = -\frac{\bar{x}}{[x^2]} \end{aligned} \quad (11)$$

Nous mentionnons que pour le calcul de la covariance on a supposé que $y_i, y_j (i \neq j)$ sont indépendantes. Nous utilisons maintenant le théorème de Fieller [3] pour le calcul des limites de confiance de la constante du type Briggs-Haldane K_1 . Puisque $m = b/a$ est la valeur estimée par K_1 , le théorème de Fieller peut-être utilisé s'agissant du rapport de deux variables normales. Les formules de calcul des deux limites de confiance m_l, m_u sont:

$$m_l, m_u = \frac{m - g \frac{v_{12}}{v_{22}} \pm \frac{ts}{a} \sqrt{v_{11} - 2mv_{12} + m^2 v_{22} - g \left(v_{11} - \frac{v_{12}^2}{v_{22}} \right)}}{1 - g} \quad (12)$$

où

$$g = \frac{t^2 s^2 v_{22}}{a^2} \quad (12')$$

et t correspond au nombre de degrés de liberté utilisé dans le calcul de s .

Pour calculer les limites de confiance correspondant à $k_{1a} E_t = \frac{1}{\alpha}$ on applique de même le théorème du Fieller, mais avec $v_{12} = v_{11} = 0$ et il résulte donc:

$$m'_c, m'_u = \frac{m'(1 \pm \sqrt{g})}{1 - g} \quad (13)$$

où $m' = 1/a$ est la valeur estimée par régression pour $k_{1a} E_t$. Dans le domaine des grandes concentrations du substrat, la formule (5) de la vitesse d'état stationnaire peut être exprimée par:

$$\frac{1}{v} \approx \frac{1}{v^*} = \frac{1}{k_{2a} E_t} + \frac{K_2}{k_{2a} E_t} \left(1 - \frac{k_{1a}}{k_{2a}} \right) \frac{1}{S} \quad (14)$$

Soit a_1, b_1 les valeurs estimées pour

$$\alpha_1 = \frac{1}{k_{2a}E_t}, \quad \beta_1 = \frac{K_2}{k_{2a}E_t} \left(1 - \frac{k_{1a}}{k_{2a}}\right)$$

donc $1/a_1$ et $ab_1/a_1(a - a_1)$ seront les valeurs pour $k_{2a}E_t$ et K_2 . Les limites de confiance pour $k_{2a}E_t = \frac{1}{\alpha_1}$ résultées du théorème de Fieller, seront

$$m'_{1l}, m'_{1u} = \frac{m'_1(1 \pm \sqrt{g_1})}{1 - g_1} \quad (15)$$

où

$$m'_1 = \frac{1}{a_1}, \quad g_1 = \frac{t^2 s_1^2 v'_{22}}{a_1^2} \quad (15')$$

et $s_1^2 v'_{22}$ représente la variance de a_1 , résultée de l'analyse de variance de régression $\frac{1}{v} = f\left(\frac{1}{S}\right)$ dans le domaine des grandes concentrations. En notant de même

$$V(b_1) = s_1^2 v'_{11}, \quad \text{cov}(a_1, b_1) = s_1^2 v'_{12}$$

le théorème de Fieller nous donne les limites de confiance m'_{1l}, m'_{1u} pour le rapport

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1} = K_2 \left(1 - \frac{k_{1a}}{k_{2a}}\right) \quad (16)$$

utilisant une formule analogue à (12).

A l'aide du théorème de Finney [4] qui représente en fait un théorème semblable à celui de Fieller, mais fondé sur la distribution Behrens, on peut calculer les limites de confiance pour le rapport entre les deux constantes de turnover k_{1a}/k_{2a} et par conséquent pour $1 - k_{1a}/k_{2a}$ qui intervient dans (16). Soit

$$\mu = \frac{\alpha_1}{\alpha} = \frac{k_{1a}}{k_{2a}}$$

et considérons la variable aléatoire $a_1 - \mu a$ dont la moyenne et variance est

$$E(a_1 - \mu a) = 0$$

$$V(a_1 - \mu a) = s_1^2 v'_{22} + \mu^2 s^2 v_{22}$$

puisque $\text{cov}(a_1, a) = 0$, les variables a_1, a , étant indépendantes. Donc comme on le sait

$$d = \frac{a_1 - \mu a}{(s_1^2 v'_{22} + \mu^2 s^2 v_{22})^{1/2}} \quad (17)$$

une distribution Behrens suit avec f_1, f_2 degrés de liberté (qui ont servi à calculer s_1^2, s_2^2 respectivement) et un angle θ défini par

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{s_1^2 v'_{22}}{s_2^2 v_{22}}} \quad (18)$$

Le théorème de Finney mène à

$$m_{2l}, m_{2u} = \frac{m_2 \pm \frac{d}{a} \sqrt{(1 - g_2) s_1^2 v'_{22} + m_2^2 s_2^2 v_{22}}}{1 - g_2} \quad (19)$$

où

$$g_1 = \frac{d^2 s_2^2 v_{22}}{a^2}, \quad m_2 = \frac{a_1}{a} \quad (19')$$

pour les limites de confiance de μ . Comme a dépend de θ qui à son tour est en fonction de μ , conformément à la formule (18), l'évaluation de m_{2l}, m_{2u} doit être faite par des approximations successives.

En conclusion le modèle fondé sur les théorèmes de Fieller et de Finney permet l'estimation de $k_{1a} E_t, k_{2a} E_t, K_1, K_2, k_{1a}/k_{2a}$ et la détermination des limites de confiance pour $k_{1a} E_t, k_{2a} E_t, K_1, k_{1a}/k_{2a}, K_2 \left(1 - \frac{k_{1a}}{k_{2a}}\right)$.

Ceci a une importance pratique particulière pour les études de cinétique enzymatique où l'on poursuit l'influence significative ou non que l'ajout de certaines substances a sur les constantes de turnover et du type Briggs-Haldane qui interviennent dans le modèle enzymatique respectif.

Le modèle a été appliqué à l'appréciation de l'influence que Tween 80 a sur la cinétique de l'action α — chimiotrypsine sur substrat T.E.E. (Eester éthylique de la tyrosine) et a mené à conclusion que celui-ci diminue sensiblement les grandeurs $k_{1a} E_t, k_{2a} E_t, K_1$ [5].

BIBLIOGRAFIE

1. Reiner J. M.: Behaviour of enzyme systems, Burgess Publ. Comp., 1959, p.66.
2. Bliss C. I.: The statistics of bio-assay, Academic Press Inc. Publ., New York, 1952, p. 460—467.
3. Fieller E. C.: The biological standardization of insulin, Journal of the Royal Stat. Soc. 1940, 7,1—64.
4. Finney D. J. Two new uses of the Behrens-Fisher distribution. J. of. the Royal Stat. Soc. 1951, B.12, 296—300.
5. N. Bonciocat, D. Hurdac, T. Florea: Studii de cinetică enzimatică privind acțiunea α — chimotripsinei pe substrat TEE pur și impurificat cu Tween 80, Lucrările Congr. de Farm., Buc. 1968.
6. Finney D. J.: Statistical method in biological assay, London 1964, Ed. Griffin.

Reçu à la rédaction le 5.XII.1968.

ASUPRA UNOR FORMULE DE REFRACTIE

N. I. DINULESCU

1. Formula refracției astronomice stabilită de E. Esclançon (1), folosind legea variației indicelui de refracție,

$$n - 1 = (n_0 - 1)e^{\mu^2(n_0^2 r_0^2 - n^2 r^2)},$$

μ fiind o constantă ce trebuie determinată ulterior, este

$$R = 2\mu n_0 r_0 (n_0 - 1) \sin z_0 \psi(v_0), \quad (1)$$

unde $v_0 = \mu n_0 r_0 \cos z_0$ și $\psi(v_0) = e^{\frac{v_0^2}{2}} \int_{v_0}^{\infty} e^{-v^2} dv$.

Astronomul francez determină constanta μ , scriind formula refracției orizontale:

$$R_0 = 2\mu n_0 r_0 (n_0 - 1) \psi(0). \quad (2)$$

Luind pentru R_0 valoarea de $36'36''$ ($t = 0^\circ\text{C}$, $p = 760$ mm Hg), $n_0 = 1,0002917$, $r_0 = 6371$ km, el deduce pentru μ valoarea $\mu = \frac{1}{309,4}$; pentru calculul valorilor refracției, Esclançon utilizează valoarea rotunjită a lui μ de $\frac{1}{310}$.

Cu această valoare a lui μ , valorile refracției calculate diferă sensibil de cele din „Connaissance des Temps”, ele fiind în general mai mici, excepție făcând valoarea pentru $z_0 = 90^\circ$, când cele două valori sînt egale.

În cele ce urmează vom deduce valoarea lui μ din modelul de atmosferă terestră a lui C. W. Allen (2); mai întîi vom pune prima relație sub o altă formă, analoagă celei folosite de A. Danjon (3).

Ea poate fi scrisă astfel:

$$\rho = \frac{\delta}{\delta_0} = \frac{n - 1}{n - 1} = e^{\mu^2 n_0^2 r_0^2 \left(1 - \frac{n^2 r^2}{n_0^2 r_0^2}\right)}. \quad (3)$$

$$\text{Dar } \frac{n^2 r^2}{n_0^2 r_0^2} = 1 + 2u$$

și expresia (3) devine

$$\rho = e^{-2\mu^2 n_0^2 r_0^2 u} \quad \text{sau} \quad \rho = e^{-\frac{u}{a}}, \quad (4)$$

unde $a = 0,0011831$.

Danjon găsește, pe o altă cale, pentru a , valoarea 0,0111078, iar autorul acestei note (4) valoarea 0,0011332, prin folosirea modelului de atmosferă terestră menționat mai înainte.

Neconcordanța dintre valorile refracției calculate cu ipoteza lui Esclangon și cele din „Connaissance des Temps” se datorează în primul rând modelului cum a fost determinată valoarea lui μ și anume ca refracțiile orizontale în cele două sisteme — Esclangon și „C.d.T.” — să fie aceleași; este evident că se presupune că locul de observație e situat la înălțimea zero.

Noi am încercat să determinăm o valoare mai precisă a lui μ prin considerarea modelului de atmosferă a lui Allen, folosind aceeași funcție de densitate

$$\rho = e^{-\frac{u}{a}},$$

unde $a = 0,0011332$; după efectuarea calculelor relația (4) ne va da $\mu = \frac{1}{303,4} = 0,003296$.

Cu această valoare a lui μ valorile refracției calculate cu expresia (1) sînt mai apropiate de cele din „C.d.T.” pînă la $z_0 = 87^\circ$, așa cum se poate constata din tabelul ce urmează.

z_0	80°	85°	87°	88°	89°	90°
Formula (1) $\mu = \frac{1}{309,4}$	329,2	610,9	893,2	1 138,4	1 527,3	2 196,0
Formula (1) $\mu = \frac{1}{303,4}$	329,2	613,8	898,5	1 151,2	1 528,6	2 240,3
„C.d.T.”	329,8	613,5	898,8	1 146,6	1 537,0	2 196,0

Acest rezultat se datorează unei valori mai precise a lui μ decît celei determinate de astronomul francez, deoarece ipoteza lui e valabilă pentru straturile joase ale atmosferei terestre — pînă la înălțimea de aproximativ 14 km —, în timp ce noi am determinat această valoare prin considerarea modelului de atmosferă terestră pînă la înălțimea de 80 km.

2.1. A. D a n j o n stabilește formula refracției în vecinătatea orizontului (3), plecând de la funcția de densitate avînd forma

$$\rho = e^{-\frac{u}{a}}.$$

Considerînd că atmosfera fictivă definită de această relație trebuie să exercite la sol aceeași presiune ca atmosfera reală, D a n j o n determină constanta $a = \beta_0 - \frac{\alpha_0}{2}$.

Observînd că această lege de variație a densității cu înălțimea e un caz particular al ipotezei lui Laplace

$$\rho = \left(1 + \frac{f}{a} u\right) e^{-\frac{u}{a}}, \text{ și anume cînd } f = 0,$$

rezultă că și constanta a va putea fi determinată într-un mod analog. Se are succesiv, folosind ecuația fundamentală a hidrostaticii, $dp = -g\rho dr$.

$$\text{și relația } \frac{g}{g_0} = \frac{r_0^2}{r^2}$$

$$dp = g_0 r_0 \delta_0 \frac{\delta}{\delta_0} d\left(\frac{r_0}{r}\right) = -g_0 r_0 \delta_0 \frac{\delta}{\delta_0} ds.$$

$$\frac{dp}{p_0} = -\frac{r_0}{l_0} \frac{\delta}{\delta_0} ds, \text{ deoarece } p_0 = g_0 \delta_0 l_0.$$

Introducînd legea variației densității cu înălțimea

$$\rho = e^{-\frac{u}{a}}$$

se obține

$$\frac{dp}{p_0} = -\frac{r_0}{l_0} e^{-\frac{u}{a}} ds.$$

Ținîndu-se seama de relația cunoscută $u = s - \alpha_0(1 - \rho)$, relația precedentă devine

$$\frac{dp}{p_0} = -\frac{r_0}{l_0} e^{-\frac{u}{a}} du + \alpha_0 \frac{r_0}{l_0} \frac{\delta}{\delta_0} d\frac{\delta}{\delta_0}$$

și în fine

$$\frac{p}{p_0} = a \frac{r_0}{l_0} e^{-\frac{u}{a}} + \frac{\alpha_0}{2} \frac{r_0}{l_0} \frac{\delta^2}{\delta_0^2}.$$

Punînd condiția la limita inferioară a atmosferei terestre, $p = p_0$, rezultă din ultima relație valoarea lui

$$a = \frac{l_0}{r_0} - \frac{\alpha_0}{2}.$$



2.2. Cu relația $\rho = e^{-\frac{u}{a}}$, D a n j o n stabilește formula refracției astronomice

$$R = \alpha_0 \left(1 - \frac{\alpha_0}{2}\right) \sqrt{\frac{2}{a}} \sin z_0 e^{X^2} \int_X^\infty e^{-x^2} dx.$$

Considerînd ca mai înainte că legea variației $\rho = e^{-\frac{u}{a}}$ e un caz particular al ipotezei lui L a p l a c e, se are formula refracției în ipoteza lui D a n j o n, în care facem $f = 0$. Se va găsi astfel

$$R = \alpha_0 \left(1 + \frac{\alpha_0}{2}\right) \sqrt{\frac{2}{a}} \sin z_0 e^{X^2} \int_X^\infty e^{-x^2} dx,$$

unde

$$X = \frac{\cos z_0}{\sqrt{2a}}.$$

Ultima formulă diferă de formula lui D a n j o n prin factorul $1 + \frac{\alpha_0}{2}$, în prima intrînd factorul $1 - \frac{\alpha_0}{2}$; aceasta e datorită faptului că în timp ce la L a p l a c e se ia $\alpha_0 = \frac{c\delta_0}{1 + c\delta_0}$ (de fapt relația este $2\alpha_0 = \frac{c\delta_0}{1 + c\delta_0}$ cu $n^2 - 1 = c\delta$, dar pentru compararea formulelor se ia $\alpha_0 = \frac{c\delta_0}{1 + c\delta_0}$ corespunzătoare relației $n - 1 = c\delta$), D a n j o n ia valoarea apropiată $\alpha_0 = c\delta_0$.

E de remarcat că valorile refracției cu cele două formule sînt foarte apropiate.

3. La stabilirea formulei lui O r i a n i — L a p l a c e (4) se are de calculat integrala $\int_0^{s_1} \frac{\delta}{\delta_0} ds$, unde notațiile sînt cunoscute. Pentru determinarea valorii acestei integrale se folosesc legea lui B o y l e - G a y - L u s s a c, relația dintre n și δ și ecuația fundamentală a hidrostaticii.

Calculul devine mai ușor dacă facem schimbarea de variabilă $s = \frac{h}{r_0}$: din relația $\frac{r_0}{r} = 1 - s$ se ajunge ușor la relația apropiată $s = \frac{h}{r_0}$ și deci $ds = \frac{dh}{r_0}$. Integrala devine

$$\int_0^{s_1} \frac{\delta}{\delta_0} ds \text{ sau } \int_0^\infty \frac{\delta}{\delta_0} ds = \frac{1}{r_0 \delta_0} \int_0^\infty \delta dh.$$

Ori $\int_0^\infty \delta dh$ exprimă masa totală de aer cuprinsă într-o coloană verticală care are ca bază unitatea de suprafață; presiunea acestei coloane (atmosferei reale)

este aceeași cu a unei atmosfere de aceeași densitate δ_0 (atmosfera omogenă) de înălțime l_0 ; se va obține deci

$$\int_0^\infty \delta dh = l_0 \delta_0$$

și deci

$$\int_0^\infty \frac{\delta}{\delta_0} ds = \frac{l_0}{r_0}.$$

Menționăm că această evaluare a integralei de mai sus a fost utilizată de A. Danjon la determinarea constantei a .

BIBLIOGRAFIE

1. Esclançon E.: Sur les réfractions astronomiques et géodésiques, *Bulletin géodésique* 69—76 (1941—1942).
2. Allen C. W.; *Astrophysical Quantities*, The Athlone Press, University of London, 1963.
3. Danjon A.; *Astronomie générale*, T. et R. Sennac, Paris, 1959.
4. Dinulescu N., *Refracția astronomică*, Editura Academiei R.S.R., 1967.

Primit la redacție la 5.I.1969

О НЕКОТОРЫХ ФОРМУЛАХ РЕФРАКЦИИ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Автор определяет новое значение для постоянной μ , входящей в формулу рефракции Е. Есклангона, используя для земной атмосферы модель К. В. Аллена.

В этой статье выводится также формула Данжона для рефракции из формулы Лапласа и дается метод для вычисления одного интеграла, который встречается в рефракции.

SUR QUELQUES FORMULES DE RÉFRACTION

R É S U M É

L'auteur détermine une nouvelle valeur pour la constante μ de la formule de la réfraction de E. Esclançon, en utilisant le nouveau modèle d'atmosphère terrestre de C.W. Allen.

On y déduit également la formule de Danjon de la formule de Laplace et on donne une méthode pour le calcul d'une intégrale qui intervient dans la réfraction.

the results of a series of experiments on the effect of the amount of food on the rate of growth of the young of the fish.

$$F = \frac{1}{2} \frac{dW}{dt}$$

$$F = \frac{1}{2} \frac{dW}{dt}$$

The results of the experiments on the effect of the amount of food on the rate of growth of the young of the fish are given in the following table.

TABLE I.

Results of the experiments on the effect of the amount of food on the rate of growth of the young of the fish. The results are given in the following table.

THE JOURNAL OF THE ROYAL ANTHROPOLOGICAL INSTITUTE

THE JOURNAL OF THE ROYAL ANTHROPOLOGICAL INSTITUTE

The results of the experiments on the effect of the amount of food on the rate of growth of the young of the fish are given in the following table.

THE JOURNAL OF THE ROYAL ANTHROPOLOGICAL INSTITUTE

The results of the experiments on the effect of the amount of food on the rate of growth of the young of the fish are given in the following table.

OBSERVAȚII ASUPRA PROBLEMEI SURSELOR ÎN MECANICA FLUIDELOR

LAZĂR DRAGOȘ

Obiectul acestei note este de a da o soluție directă în clasică problemă a surselor. De obicei, în mecanica fluidelor, se determină distribuția de viteze în mișcarea datorată unei surse de fluid prin metoda inversă, anume, se admite că mișcarea fluidului este potențială și se constată că anumiți potențiali (de ex. $\varphi(r) = \frac{q}{2\pi} \ln r$ în mișcarea incompresibilă plană și $\varphi(r) = \frac{q}{4\pi} \frac{1}{r}$ în mișcarea incompresibilă tridimensională) conduc la configurații de mișcări asemănătoare cu cele datorate unei surse de fluid. Se conchide apoi, în baza teoremei de unicitate, că acești potențiali reprezintă mișcarea fluidului datorată existenței unei surse. Este evident că potențialii din exemplele de mai sus sînt soluțiile elementare ale ecuației lui Laplace.

Metoda amintită, deși elementară, nu este totuși suficient de pedagogică. Se admite implicit, în momentul cînd se utilizează ecuația de continuitate sub forma $\text{div}(\rho \vec{V}) = 0$, că punctul în care este plasată sursa, nu face parte din domeniul ocupat de fluid. Este evident, în exemplele de mai sus, că cele două funcții nu sînt armonice pentru $r = 0$.

1. Pentru a da o soluție directă în problema surselor, vom porni de la ecuația de continuitate în cazul că există surse:

$$(1) \quad \frac{dm}{dt} = \sum_s \rho_0 q_s, \quad m = \int_{(v)} \rho(\vec{r}, t) dv$$

$\rho_0 q_s$ fiind debitul (cantitatea de masă de fluid în unitatea de timp) sursei s conținute în volumul (v) . Utilizînd formula de derivare sub integrală și definiția distribuției lui Dirac, se deduce ecuația de continuitate:

$$(2) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = \sum_s \rho_0 q_s \delta(\vec{r} - \vec{r}_s).$$

Presupunem, pentru simplificare, că mișcarea fluidului se datorește unei singure surse plasată în origine și avînd debitul constant. Soluția problemei în cazul mai multor surse, se va construi folosind principiul superpoziției. În ipotezele precizate, ecuația (2) devine:

$$(2') \quad \text{div}(\rho \vec{V}) = \rho_0 q \delta(\vec{r})$$

Este evident că mișcarea fluidului va avea simetrie sferică dacă sîntem în spațiul cu trei dimensiuni și simetrie axială, mărimile nedepinzînd de cota z , dacă sursa este un fir infinit în lungul axei Oz . Așadar (2') devine:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \rho V) = \rho_0 q \delta(r) \quad \text{în mișcarea tridimensională}$$

(3)

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \rho V) = \rho_0 q \delta(r) \quad \text{în mișcarea bidimensională}$$

V fiind componenta vitezei după raza vectoare, singura componentă nenulă.

La ecuația de continuitate va trebui să mai adăugăm ecuația de mișcare și ecuația de stare:

$$(4) \quad V \frac{dV}{dr} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} = -\frac{d}{dr} \int \frac{dp}{\rho}$$

$$(5) \quad p = k \rho^\gamma$$

Dacă se neglijează schimbul de căldură, mișcarea este izentropică. Este evident că ecuația (4) se poate scrie:

$$(4') \quad \frac{1}{2} V^2 + \int \frac{dp}{\rho} = \text{Const.}$$

(4') fiind ecuația lui Bernoulli. Explicația acestui fapt (ecuația lui Bernoulli este valabilă pentru mișcarea potențială) constă în aceea că din ipoteza că mișcarea are simetrie sferică, rezultă că ea este potențială. Într-adevăr, dacă $\vec{V} = f(r) \frac{\vec{r}}{r}$, atunci:

$$\vec{V} = \text{grad } \Phi, \quad \Phi = \int f(r) dr$$

Se mai observă de asemenea că în baza ecuației (5) avem:

$$\int \frac{dp}{\rho} = \frac{k\gamma}{\gamma-1} \rho^{\gamma-1} = \frac{1}{\gamma-1} \frac{dp}{d\rho} = \frac{a^2}{\gamma-1}$$

a fiind viteza sunetului. Ecuația (4') devine:

$$(4'') \quad \frac{1}{2} V^2 + \frac{a^2}{\gamma-1} = \frac{a_\infty^2}{\gamma-1}, \quad a_\infty^2 = \gamma \frac{p_\infty}{\rho_\infty}$$

a_∞ fiind viteza sunetului la infinit. Am presupus că viteza fluidului la infinit este nulă. Aceasta este a doua ipoteză — după simetrie — care se impune de la sine.

2. Să determinăm acum soluția ecuațiilor (3). Ecuațiile omogene au soluțiile:

$$(6) \quad \rho V = \frac{C_i}{r^i} \quad \begin{matrix} i = 2 & \text{pentru mișcarea tridimensională} \\ i = 1 & \text{pentru mișcarea bidimensională} \end{matrix}$$

C_2 și C_1 fiind constante. În (6) mai erau două constante aditive care însă sînt nule din cauză că viteza se anulează la infinit. Soluțiile (6) verifică ecuația de continuitate în afara originii. Ecuația de continuitate (3) trebuie însă concepută în sensul teoriei distribuțiilor. Așadar, vom cere ca ea să fie satisfăcută global. Integrînd-o pe o sferă cu centrul în origine și raza ε (pe un cerc în cazul plan) se obține (utilizînd elementul de volum în coordonate sferice):

$$(7) \quad \int_{r=\varepsilon} \frac{d}{dr} (r^2 \rho V) \cos \theta d\theta d\varphi dr = \rho_0 q$$

sau, integrînd în raport cu r de la 0 la ε și ținînd cont de elementul de arie pe sferă ds ,

$$(7') \quad \int \rho V ds = \rho_0 q$$

Este evidentă semnificația mecanică a ecuației (7'). Ea arată că fluxul de fluid prin suprafața sferei este $\rho_0 q$. Ținînd cont de (6), de aria sferei (lungimea cercului în cazul problemei plane) rezultă:

$$(7'') \quad C_2 = \frac{\rho_0 q}{4\pi}, \quad C_1 = \frac{\rho_0 q}{2\pi}$$

Este evident că dacă fluidul este incompresibil, problema este rezolvată. În cazul fluidului incompresibil ecuația de continuitate determină complet distribuția de viteze.

3. Dacă fluidul este compresibil, în (6) ρ este necunoscut, astfel că este necesar să mai utilizăm ecuațiile (4'') și (5). Ținînd cont de (5) (care ne dă

$\rho^{\gamma-1} = \frac{a^2}{k\gamma}$) rezultatele (6) devin:

$$(8) \quad V = \frac{\bar{C}_i}{r^i} a^{\frac{2}{1-\gamma}}, \quad \bar{C}_i = C_i (k\gamma)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

Studiul calitativ al ecuațiilor (4'') și (8), în planul (a, V) , este clasic. În acest studiu r trebuie privit ca un parametru. Este evident că a și V sînt pozitivi, astfel că studiul curbelor va fi limitat la primul cadran. Ecuația (4'') reprezintă o elipsă avînd semiaxa în direcția a mai mică ($\gamma \simeq 1,4$) decît semiaxa în direcția V ($= \sqrt{2}$). Ecuația (8) reprezintă o familie de iperbole care intersectează sau nu elipsa. Pentru a determina punctul în care iperbola este tangentă elipsei, vom diferenția ecuațiile (4'') și (8). Se obține

$$V dV + \frac{2a}{\gamma-1} da = 0$$

$$dV + \frac{2}{\gamma-1} da = 0$$

Ca să existe soluție, trebuie ca determinantul sistemului de sus să fie nul. Scriind aceasta se deduce $V=a$. Așadar, punctul I în care iperbola este tangentă elipsei, este pe bisectoare; punctele de intersecție B sînt caracterizate

de $V > a$, deci corespund mișcării supersonice, iar punctele de intersecție A ($V < a$) corespund mișcării subsonice. Așadar, pentru oricare r avem o viteză supersonică și una subsonică. Evident că se realizează numai o mișcare. Mișcarea posibilă este caracterizată de iperbole care taie elipsa. Iperbola care separă familia în iperbole pentru care mișcarea este posibilă ($r > r_*$) și în iperbole pentru care mișcarea nu este posibilă ($r < r_*$) adică iperbola ce trece prin I , corespunde lui r_* ce se obține din (8) făcând $V = a$. Avem:

$$(9) \quad r_*^i = \bar{C}_i a_*^{\frac{1+\gamma}{1-\gamma}}$$

ecuația (4'') determinînd:

$$(10) \quad V_* = a_* = a_\infty \sqrt{\frac{2}{\gamma + 1}}$$

Rezultatul discuției pentru cazul plan coincide cu cel clasic [1]. Discuția de mai sus este valabilă și pentru spațiul tridimensional.

4. *Sursa dublă*. Sursa dublă într-un punct $\vec{r}_0$ este configurația ce se obține din două izvoare, unul pozitiv și altul negativ, plșate la distanța $\varepsilon/2$ pe direcția $\vec{u}$ ce trece prin $\vec{r}$, atunci cînd $\varepsilon \rightarrow 0$, debitul crescînd astfel ca

$$(11) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho_0 q \varepsilon = m$$

m fiind un număr finit diferit de zero. Făcînd operația descrisă în spațiul fundamental $\{f\}$ [2], obținem:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho_0 q \left\{ f\left(\vec{r}_0 + \frac{\varepsilon}{2} \vec{u}\right) - f\left(\vec{r}_0 - \frac{\varepsilon}{2} \vec{u}\right) \right\} = m \frac{df}{du}(\vec{r}_0)$$

d/du fiind derivata după direcția $\vec{u}$. Operația de definiție în distribuții are următorul aspect:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho_0 q \left\{ \delta\left(\vec{r} - \vec{r}_0 - \frac{\varepsilon}{2} \vec{u}\right) - \delta\left(\vec{r} - \vec{r}_0 + \frac{\varepsilon}{2} \vec{u}\right) \right\}$$

astfel că, utilizînd proprietatea de translație și definiția de derivare, obținem:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho_0 q \left\{ \left\langle \delta\left(\vec{r} - \vec{r}_0 - \frac{\varepsilon}{2} \vec{u}\right), f(\vec{r}) \right\rangle - \left\langle \delta\left(\vec{r} - \vec{r}_0 + \frac{\varepsilon}{2} \vec{u}\right), f(\vec{r}) \right\rangle \right\} = \\ = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho_0 q \left\langle \delta(\vec{r} - \vec{r}_0), f\left(\vec{r} + \frac{\varepsilon}{2} \vec{u}\right) - f\left(\vec{r} - \frac{\varepsilon}{2} \vec{u}\right) \right\rangle = \\ = m \left\langle \delta(\vec{r} - \vec{r}_0), \frac{df}{du}(\vec{r}) \right\rangle^* = -m \left\langle \frac{d}{du} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0), f(\vec{r}) \right\rangle \end{aligned}$$

trecerea limitei sub integrală fiind posibilă întrucît δ este și o măsură. În concluzie, sursa dublă în $\vec{r}_0$ este reprezentată de distribuția:

$$(12) \quad -m \frac{d}{du} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = -m \left\{ u_x \frac{\partial}{\partial x} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) + u_y \frac{\partial}{\partial y} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) + u_z \frac{\partial}{\partial z} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \right\}$$

ultima expresie rezultând din expresia derivatei și din liniaritatea funcționalei (*). Configurația mișcării se poate obține din ecuația de continuitate:

$$(12') \quad \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = -m \frac{d}{du} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

numai că în acest caz nu vom avea simetrie sferică. Se poate însă presupune că mișcarea este potențială. Este însă mai comod să o obținem cu principiul superpoziției direct din configurațiile celor două izvoare, așa cum se face de obicei în hidrodinamică.

5. În încheiere să spunem un cuvânt despre problema vârtejurilor în mișcarea plană. În acest caz nu este nevoie de distribuții pentru a defini noțiunea. Din configurația concretă a vârtejului rezultă că viteza va depinde numai de r și că numai componenta sa perpendiculară pe raza vectoare, V_θ va fi diferită de zero. Într-un sistem de referință cu originea în centrul vârtejului, ecuația de continuitate este identic verificată. Scriind că mișcarea este potențială ($\operatorname{rot} \vec{V} = 0$) se deduce $\frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) = 0$ și deci:

$$(13) \quad V_\theta = \frac{C}{r}$$

constanta C fiind determinată de circulația vitezei pe o circumferință cu centrul în origine. Se deduce:

$$(13') \quad \Gamma = \oint V_\theta r d\theta = 2\pi C$$

Din prima ecuație de mișcare și ecuația de stare, sau din ecuația lui Bernoulli și ecuația de stare, se determină presiune și densitatea. De exemplu, prima ecuație de mișcare și ecuația de stare ne dau:

$$\frac{V_\theta^2}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} = k\gamma \rho^{\gamma-2} \frac{d\rho}{dr} = \frac{k\gamma}{\gamma-1} \frac{d}{dr} \rho^{\gamma-1}$$

astfel încât:

$$(14) \quad \rho = \rho_\infty \left(1 - \frac{\gamma-1}{2a_\infty^2} \frac{C^2}{r^2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$$(15) \quad p = p_\infty \left(1 - \frac{\gamma-1}{2a_\infty^2} \frac{C^2}{r^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Întrucât $\rho \geq 0$ din (14) rezultă o limită inferioară pentru r

$$(16) \quad r \geq r_{\min} = \frac{|C|}{a_\infty} \sqrt{\frac{\gamma-1}{2}}$$

Din (13) rezultă o limită superioară pentru V .

Este de asemenea ușor de determinat r pentru care viteza este egală cu viteza sunetului. Întrucît:

$$(17) \quad a^2 = \gamma \frac{p}{\rho} = a_\infty^2 \left(1 - \frac{\gamma-1}{2a_\infty^2} \frac{C^2}{r^2} \right)$$

rezultă (din (13) și (17)):

$$(18) \quad r_* = \frac{|C|}{a_\infty} \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}$$

Așadar, la infinit viteza este zero, apoi crește pe măsură ce distanța r descrește. Viteza este subsonică dacă $r > r_*$, apoi devine supersonică, limita ei superioară fiind:

$$(19) \quad V_{max} = a_\infty \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}}$$

atinsă pentru r dat de (16).

Observația cea mai importantă care se poate face în acest caz, este că distribuția de viteze este aceeași, fie că fluidul este compresibil, fie că este incompresibil. În coordonate carteziene avem:

$$(20) \quad V_x = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y}{r^2}, \quad V_x = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x}{r^2}$$

În fine, o observație de ordin didactic. Prezentarea de mai sus se poate face la curs imediat după deducerea ecuației lui Bernoulli. Ecuația de continuitate, într-un domeniu fără izvoare, se poate obține scriind în mod adecvat fluxul de fluid care traversează domeniul. De exemplu, în problema izvoarelor în spațiu este indicat să se ia două sfere concentrice de rază r și $r + \Delta r$. Condiția ca masa de fluid conținută între cele două sfere să nu varieze, este:

$$4\pi\rho(r) r^2 V(r) = 4\pi\rho(r + \Delta r) V(r + \Delta r) (r + \Delta r)^2$$

Utilizînd formula creșterilor finite, se obține:

$$\frac{d}{dr} (r^2 \rho V) = 0$$

Așadar, nu este nevoie de scrierea ecuațiilor în coordonate curbilinii.

BIBLIOGRAFIE

- [1] C. Iacob: Introduction Mathématique à la Mécanique des Fluides. Bucarest-Paris, 1959.
 [2] И. М. ГЕЛЬФАНД и Г. Е. ШИЛОВ: Обобщенные функции и действия над ними I. Москва 1958.

О ЗАДАЧЕ ИСТОЧНИКОВ В МЕХАНИКЕ ЖИДКОСТИ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Дается прямое решение задачи источников используя уравнение неразрывности из теории обобщенных функций.

OBSERVATION SUR LE PROBLÈME DES SOURCES EN MECANIQUE DES FLUIDES

R É S U M É

On présente une solution directe du problème des sources, en partant de l'équation de continuité en distributions.

O JALAFI HETOPHOBIC D-METHANE KINETICS

REPORT OF THE JALAFI

REPORT OF THE JALAFI HETOPHOBIC D-METHANE KINETICS

ABSTRACT: THE JALAFI HETOPHOBIC D-METHANE KINETICS

ALUMINUM

ALUMINUM

ASUPRA GRUPURILOR LINIARE COMUTATIVE ȘI LOCAL TRANZITIVE CU 2, 3 ȘI 4 PARAMETRI

IOANA DRĂGHICI

Determinarea conexiunilor afine local euclidiene, constante, este echivalentă cu determinarea grupurilor liniare, comutative și local tranzitive [2].

Fiind dat un spațiu A_n dotat cu o conexiune $\Gamma(\Gamma_{jk}^i)$ constantă, local euclidiană, lui i se atașează un grup de automorfisme G — grupul translațiilor. —

$$(1) \quad y^i = x^i + a^i$$

comutativ și local tranzitiv.

Orice punct al lui A_n este inclus într-o vecinătate în care se pot introduce coordonate carteziene. Dacă $\varphi: (x) \rightarrow (u)$ este transformarea ce transformă coordonatele x^i în coordonate carteziene u^i într-o vecinătate din A_n , φ transformă grupul (1) într-un grup G' local tranzitiv și comutativ al spațiului euclidian afin. Clasificarea acestor grupuri o vom face ținând seama de clasificările spațiilor A_n cu conexiune constantă local euclidiană obținută de acad. G. Vrăncanu pentru A_2 , P. Mocanu pentru A_3 și I. Drăghici pentru A_4 .

Transformările care realizează echivalența spațiului A_n cu E_n se obțin integrând sistemul

$$(2) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^s \frac{\partial u}{\partial x^s} = 0 \quad (i, j, s = 1, \dots, n)$$

complet integrabil a cărei integrală generală are forma:

$$u = a_0 + a_i u^i$$

unde a_0, a_i sînt constante iar u^i sînt funcții liniar independente.

Aplicînd transformările φ grupului (1) obținem clasificarea grupurilor liniare comutative local tranzitive.

1. Dăm mai întîi un tablou al clasificării spațiilor A_2, A_3 și A_4 prin conexiunile afine constante local euclidiene atașate:

Pentru A_2 :

- I. $\Gamma_{11}^1 = 1$
- II. $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{22}^2 = 1$
- III. $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{13}^2 = 1$
- IV. $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = -\Gamma_{22}^1 = 1$
- V. $\Gamma_{11}^2 = 1$

Pentru A_3 :

- I. $\Gamma_{11}^1 = 1$
- II. $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{22}^2 = 1$
- III. $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{22}^2 = \Gamma_{33}^3 = 1$
- IV. $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = 1$
- V. $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{33}^3 = 1$
- VI. $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = -\Gamma_{22}^1 = 1$
- VII. $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = -\Gamma_{22}^1 = \Gamma_{33}^3 = 1$
- VIII. $\Gamma_{11}^2 = 1$
- IX. $\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{33}^3 = 1$
- X. $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = 1$
- XI. $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{22}^1 = 1$
- XII. $\Gamma_{12}^3 = 1$
- XIII. $\Gamma_{11}^3 = \Gamma_{22}^3 = 1$
- XIV. $\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^3 = 1$

Pentru A_4 :

1. $\Gamma_{11}^1 = 1$
2. $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{22}^2 = 1$
3. $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{22}^2 = \Gamma_{33}^3 = 1$
4. $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{22}^2 = \Gamma_{33}^3 = \Gamma_{44}^4 = 1$
5. $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = 1$
6. $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{33}^3 = 1$
7. $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{33}^3 = \Gamma_{44}^4 = 1$
8. $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = -\Gamma_{22}^1 = 1$
9. $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = -\Gamma_{22}^1 = \Gamma_{33}^3 = 1$
10. $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = -\Gamma_{22}^1 = \Gamma_{33}^3 = \Gamma_{44}^4 = 1$
11. $\Gamma_{11}^2 = 1$
12. $\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{33}^3 = 1$
13. $\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{33}^3 = \Gamma_{44}^4 = 1$
14. $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = 1$
15. $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{44}^4 = 1$
16. $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{22}^1 = 1$
17. $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{44}^4 = 1$
18. $\Gamma_{12}^3 = 1$
19. $\Gamma_{12}^3 = \Gamma_{44}^4 = 1$
20. $\Gamma_{11}^3 = \Gamma_{22}^3 = 1$
21. $\Gamma_{11}^3 = \Gamma_{22}^3 = \Gamma_{44}^4 = 1$
22. $\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^3 = 1$
23. $\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^3 = \Gamma_{44}^4 = 1$

24. $\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{33}^4 = 1$
25. $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = -\Gamma_{22}^1 = \Gamma_{33}^4 = 1$
26. $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{33}^4 = 1$
27. $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = -\Gamma_{22}^1 = \Gamma_{33}^3 = \Gamma_{34}^4 = 1$
28. $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = -\Gamma_{22}^1 = \Gamma_{33}^3 = \Gamma_{34}^4 = -\Gamma_{44}^3 = 1$
29. $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{33}^3 = \Gamma_{34}^4 = 1$
30. $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{14}^4 = 1$
31. $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{14}^4 = \Gamma_{33}^4 = 1$
32. $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{14}^4 = \Gamma_{23}^4 = 1$
33. $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{14}^4 = \Gamma_{22}^4 = \Gamma_{33}^4 = 1$
34. $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{14}^4 = \Gamma_{22}^3 = \Gamma_{23}^4 = 1$
35. $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{14}^4 = \Gamma_{23}^4 = -\Gamma_{33}^1 = -\Gamma_{34}^2 = 1$
36. $\Gamma_{11}^4 = \Gamma_{22}^4 = \Gamma_{33}^4 = 1$
37. $\Gamma_{11}^4 = \Gamma_{23}^4 = 1$
38. $\Gamma_{12}^3 = \Gamma_{11}^4 = \Gamma_{22}^4 = 1$
39. $\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^3 = \Gamma_{13}^4 = \Gamma_{22}^4 = 1$
40. $\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^4 = \Gamma_{33}^4 = 1$

2. Grupurile abeliene local tranzitive cu 2 parametri:

Pornind de la conexiunea $\Gamma_{11}^1 = 1$ și integrând sistemul (2) obținem transformarea φ .

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^1 \partial x^1} = \frac{\partial u}{\partial x^1}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^1 \partial x^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2 \partial x^2} = 0$$

Soluția generală este:

$$u = Ax^2 + Bx^1 + C$$

Luăm:

$$\varphi: \begin{cases} u_1 = e^{x^1} \\ u^2 = x^2 \end{cases} \text{ și grupul abelian atașat I } \begin{cases} y'^1 = e^{a^1} u^1 \\ y'^1 = u^2 + a^2 \end{cases} \text{ este}$$

Avem deci:

$$\text{I } \begin{cases} y'^1 = e^{a^1} u^1 \\ y'^2 = u^2 + a^2 \end{cases} \text{ ai cărui operatori sînt: } \begin{cases} X_1 = u^1 \partial_1 + u^2 \partial_2 \\ X_2 = u^1 \partial_2 \end{cases}$$

În mod asemănător obținem:

$$\begin{aligned} \text{II } & \begin{cases} y'^1 = e^{a^1} u^1 \\ y'^2 = e^{a^2} u^2 \end{cases} & \begin{cases} X_1 = u^1 \partial_1 \\ X_2 = u^2 \partial_2 \end{cases} \\ \text{III } & \begin{cases} y'_1 = e^{a^1} u^1 \\ y'^2 = a^2 e^{a^1} u^1 + e^{a^1} u^2 \end{cases} & \begin{cases} X_1 = u^1 \partial_1 + u^2 \partial_2 \\ X_2 = u^1 \partial_2 \end{cases} \\ \text{IV } & \begin{cases} y'^1 = e^{a^1} (u^1 \cos a^2 - u^2 \sin a^2) \\ y'^2 = e^{a^1} (u^1 \sin a^2 + u^2 \cos a^2) \end{cases} & \begin{cases} X_1 = u^1 \partial_1 + u^2 \partial_2 \\ X_2 = -u^2 \partial_1 + u^1 \partial_2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$V \begin{cases} y'^1 = u^1 + a^1 \\ y'^1 = a^1 u^1 + u^2 + a^2 + \frac{1}{2} (a^1)^2 \end{cases} \quad \begin{cases} X_1 = \partial_1 + u^1 \partial_2 \\ X_2 = \partial_2 \end{cases}$$

Acad. Gr. C. Moisil arată că unei conexiuni constante simetrice local euclidiene i se atașează o algebră cu legile de înmulțire

$$e_i e_j = \Gamma_{ij}^k e_k$$

asociativă și comutativă.

Dacă algebra este nilpotentă atunci transformările φ sînt cremoniene iar grupul abelian corespunzător conține parametrii sub formă de polinoame.

Pentru G'_2 există un singur astfel de caz și anume cazul V.

3. Să determinăm acum grupurile abeliene cu 3 parametri.

Convenim să notăm transformările φ prin: $x'^i = x'^i(x^1, \dots, x^n)$.

$$\text{Fie } \Gamma_{11}^1 = 1, \text{ sistemul: } \frac{\partial^2 u}{\partial x^1 \partial x^1} = \frac{\partial u}{\partial x^1}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^1 \partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^1 \partial x^3} = 0 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2 \partial x^3} = 0 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^3 \partial x^3} = 0 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^3 \partial x^3}$$

admite integrala generală:

$$u = a_0 + a_1 e^{x^1} + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

Luăm deci:

$$x'^1 = e^{x^1} \quad x'^2 = x^2 \quad x'^3 = x^3$$

iar grupul abelian G'_3 este:

$$I \begin{cases} y'^1 = e^{a^1} x'^1 \\ y'^2 = x^2 + a^2 \\ y'^3 = x^3 + a^3 \end{cases} \quad \text{cu operatorii: } \begin{cases} X_1 = x'^1 \partial_2 \\ X_2 = \partial_2 \\ X_3 = \partial^3 \end{cases}$$

În mod analog obținem:

$$II \begin{cases} y'^1 = e^{a^1} x'^1 \\ y'^2 = e^{a^2} x'^2 \\ y'^3 = x'^3 + a^3 \end{cases} \quad \begin{cases} X_1 = x^1 \partial_1 \\ X_2 = x'^2 \partial_2 \\ X_3 = \partial_3 \end{cases}$$

$$III \begin{cases} y'^1 = e^{a^1} x'^1 \\ y'^2 = e^{a^2} x'^2 \\ y'^3 = e^{a^3} x'^3 \end{cases} \quad \begin{cases} X_1 = x'^1 \partial_1 \\ X_2 = x'^2 \partial_2 \\ X_3 = x'^3 \partial_3 \end{cases}$$

$$\text{IV} \begin{cases} y'^1 = e^{a^1} x'^1 \\ y'^2 = a^2 e^{a^1} x'^1 + e^{a^1} x'^2 \\ y'^3 = x'^3 + a^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 = x'^1 \partial_1 + x'^2 \partial_2 \\ X_2 = x'^1 \partial_2 \\ X_3 = \partial_3 \end{cases}$$

$$\text{V} \begin{cases} y'^1 = e^{a^1} x'^1 \\ y'^2 = a^2 e^{a^1} x'^1 + e^{a^1} x'^2 \\ y'^3 = e^{a^1} x'^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 = x'^1 \partial_1 + x'^2 \partial_2 \\ X_2 = x'^1 \partial_2 \\ X_3 = x'^1 \partial_3 \end{cases}$$

$$\text{VI} \begin{cases} y'^1 = e^{a^1} (x'^1 \cos a^2 - x'^2 \sin a^2) \\ y'^2 = e^{a^1} (x'^1 \sin a^2 + x'^2 \cos a^2) \\ y'^3 = x'^3 + a^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 = x'^1 \partial_1 + x'^2 \partial_2 \\ X_2 = -x'^2 \partial_1 + x'^1 \partial_2 \\ X_3 = \partial_3 \end{cases}$$

$$\text{VII} \begin{cases} y'^1 = e^{x^1} (x'^1 \cos a^2 - x'^2 \sin a^2) \\ y'^2 = e^{x^1} (x'^1 \sin a^2 + x'^2 \cos a^2) \\ y'^3 = e^{a^3} x'^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 = x'^1 \partial_1 + x'^2 \partial_2 \\ X_2 = -x'^2 \partial_1 + x'^1 \partial_2 \\ X_3 = x'^3 \partial_3 \end{cases}$$

$$\text{VIII} \begin{cases} y'^1 = x'^1 + a^1 \\ y'^2 = a^1 x'^1 + x'^2 + a^2 + \frac{1}{2} (a^1)^2 \\ y'^3 = x'^3 + a^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 = \partial_1 + x'^1 \partial_2 \\ X_2 = \partial_2 \\ X_3 = \partial_3 \end{cases}$$

$$\text{IX} \begin{cases} y'^1 = x'^1 + a^1 \\ y'^2 = a^1 x'^1 + x'^2 + a^2 + \frac{1}{2} (a^1)^2 \\ y'^3 = e^{a^2} x'^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 = \partial_1 + x'^1 \partial_2 \\ X_2 = \partial_2 \\ X_3 = x'^3 \partial_3 \end{cases}$$

$$\text{X} \begin{cases} y'^1 = e^{a^1} x'^1 \\ y'^2 = a^2 e^{a^1} x'^1 + e^{a^1} x'^2 \\ y'^3 = a^3 e^{a^1} x'^1 + e^{a^1} x'^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 = x'^1 \partial_1 + x'^2 \partial_2 + x'^3 \partial_3 \\ X_2 = x'^1 \partial_2 \\ X_3 = x'^1 \partial_3 \end{cases}$$

$$\text{XI} \begin{cases} y'^1 = e^{a^1} x'^1 \\ y'^2 = a^2 e^{a^1} x'^1 + e^{a^1} x'^2 \\ y'^3 = \left[a^3 + \frac{1}{2} (a^2)^2 \right] e^{a^1} x'^1 + a^2 e^{a^1} x'^2 + e^{a^1} x'^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 = x'^1 \partial_1 + x'^2 \partial_2 + x'^3 \partial_3 \\ X_2 = x'^1 \partial_2 + x'^2 \partial_3 \\ X_3 = x'^1 \partial_3 \end{cases}$$

$$\text{XII} \left\{ \begin{array}{l} y'^1 = x'^1 + a^1 \\ y'^2 = x'^2 + a^2 \\ y'^3 = a^2 x'^1 + a^1 x'^2 + x'^3 + a^3 + a^1 a^2 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} X_1 = \partial_1 + x'^2 \partial_3 \\ X_2 = \partial_2 + x'^1 \partial_3 \\ X_3 = \partial_3 \end{array} \right.$$

$$\text{XIII} \left\{ \begin{array}{l} y'^1 = x'^1 + a^1 \\ y'^2 = x'^2 + a^2 \\ y'^3 = a^1 x'^1 + a^2 x'^2 + x'^3 + a^3 + \\ \quad + \frac{1}{2} (a^1)^2 + \frac{1}{2} (a^2)^2 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} X_1 = \partial_1 + x'^1 \partial_3 \\ X_2 = \partial_2 + x'^2 \partial_3 \\ X_3 = \partial_3 \end{array} \right.$$

$$\text{XIV} \left\{ \begin{array}{l} y'^1 = x'^1 + a^1 \\ y'^2 = a^1 x'^1 + x'^2 + \\ \quad + a^2 + \frac{1}{2} (a^1)^2 \\ y'^3 = \left[a^2 + \frac{1}{2} (a^1)^2 \right] x'^1 + a^1 x'^2 + \\ \quad + x'^3 + a^3 + a^1 a^2 + \frac{1}{6} (a^1)^3 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} X_1 = \partial_1 + x'^1 \partial_2 + x'^2 \partial_3 \\ X_2 = \partial_2 + x'^2 \partial_3 \\ X_3 = \partial_3 \end{array} \right.$$

Din rezultatele obținute observăm că pentru G'_3 nu există decît 4 grupuri ce conțin constantele sub formă de polinoame.

4. Fie conexiunea: $\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^4 = \Gamma_{33}^4 = 1$. Sistemul (2) are ecuațiile:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^1 \partial x^1} = \frac{\partial u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^1 \partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial x^4}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^3 \partial x^3} = \frac{\partial u}{\partial x^4};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^1 \partial x^3} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^1 \partial x^4} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2 \partial x^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2 \partial x^3} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2 \partial x^4} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^3 \partial x^4} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^4 \partial x^4} = 0,$$

Integrala generală are forma:

$$u = a_0 + a_1 x^1 + a_2 \left[x^1 + \frac{1}{2} (x^1)^2 \right] + a_3 x^3 + a^4 \left[x^4 + \frac{1}{2} (2x^1 x^2 + (x^3)^2) + \right. \\ \left. + \frac{1}{6} (x^1)^3 \right]$$

Luăm deci:

$$x'^1 = x^1, \quad x'^2 = x^2 + \frac{1}{2} (x^1)^2, \quad x'^3 = x^3, \quad x'^4 = x^4 + x^1 x^2 + \\ + \frac{1}{2} (x^3)^2 + \frac{1}{6} (x^1)^3$$

Inversa ei este:

$$x^1 = x'^1 \quad x^2 = x'^2 - \frac{1}{2} (x'^1)^2 \quad x^3 = x'^3 \quad x^4 = x'^4 - x'^1 x'^2 - \\ - \frac{1}{2} x'^3)^2 + \frac{1}{3} (x'^1)^3$$

Aplicînd-o grupului

$$y^1 = x^1 + a^1 \quad y^2 = x^2 + a^2 \quad y^3 = x^3 + a^3 \quad y^4 = x^4 + a^4$$

Obținem:

$$y'^1 = x'^1 + a^1 \\ y'^2 = a^1 x'^1 + x'^2 + a^2 + \frac{1}{2} (a^1)^2 \\ y'^3 = x'^3 + a^3 \\ y'^4 = \left[a^2 + \frac{1}{2} (a^1)^2 \right] x'^1 + a^1 x'^2 + a^3 x'^3 + a^4 + a^4 a^1 a^2 + \frac{1}{2} (a^3)^2 + \frac{1}{6} (a^1)^3$$

ai cărui operatori sînt:

$$X_1 = \partial_1 + x_1 \partial_2 + x^2 \partial_4 \\ X_2 = \partial_2 + x^1 \partial_4 \\ X_3 = \partial_3 + x^3 \partial_4 \\ X_4 = \partial_4$$

Procedînd în același mod cu celelalte conexiuni obținem pentru G'_4 cazurile:

$$1. \Gamma_{11}^1 = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'^1 = e^{a^1} x'^1 \\ y'^2 = x'^2 + a^2 \\ y'^3 = x'^3 + a^3 \\ y'^4 = x'^4 + a^4 \end{array} \right. \quad \text{cu operatorii} \quad \left\{ \begin{array}{l} X_1 = x'^1 \partial_1 \\ X_2 = \partial_2 \\ X_3 = \partial_3 \\ X_4 = \partial_4 \end{array} \right.$$

$$2. \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{22}^2 = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'^1 = e^{a^1} x'^1 \\ y'^2 = e^{a^2} x'^2 \\ y'^3 = x'^3 + a^3 \\ y'^4 = x'^4 + a^4 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} X_1 = x'^1 \partial_2 \\ X_2 = x'^2 \partial_2 \\ X_3 = \partial_3 \\ X = \partial_4 \end{array} \right.$$

$$3. \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{22}^2 = \Gamma_{33}^3 = 1$$

$$\begin{cases} y'^1 = e^{a^1} x'^1 \\ y'^2 = e^{a^2} x'^2 \\ y'^3 = e^{a^3} x'^3 \\ y'^4 = x'^4 + a^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 = x'^1 \partial_1 \\ X_2 = x'^2 \partial_2 \\ X_3 = x'^3 \partial_3 \\ X_4 = \partial_4 \end{cases}$$

$$4. \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{22}^2 = \Gamma_{33}^3 = \Gamma_{44}^4 = 1$$

$$\begin{cases} y'^1 = e^{a^1} x'^1 \\ y'^2 = e^{a^2} x'^2 \\ y'^3 = e^{a^3} x'^3 \\ y'^4 = e^{a^4} x'^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 = x'^1 \partial_1 \\ X_2 = x'^2 \partial_2 \\ X_3 = x'^3 \partial_3 \\ X_4 = x'^4 \partial_4 \end{cases}$$

$$5. \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = 1$$

$$\begin{cases} y'^1 = e^{a^1} x'^1 \\ y'^2 = a^2 e^{a^1} x'^1 + e^{a^1} x'^2 \\ y'^3 = x'^3 + a^3 \\ y'^4 = x'^4 + a^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 = x'^1 \partial_1 + x'^2 \partial_2 \\ X_2 = x'^1 \partial_2 \\ X_3 = \partial_3 \\ X_4 = \partial_4 \end{cases}$$

$$6. \Gamma_{17}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{33}^3 = 1$$

$$\begin{cases} y'^1 = e^{a^1} x'^1 \\ y'^2 = a^2 e^{a^1} x'^1 + e^{a^1} x'^2 \\ y'^3 = e^{a^3} x'^3 \\ y'^4 = x'^4 + a^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 = x'^1 \partial_1 + x'^2 \partial_2 \\ X_2 = x'^1 \partial_2 \\ X_3 = x'^3 \partial_3 \\ X_4 = \partial_4 \end{cases}$$

$$7. \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{33}^3 = \Gamma_{44}^4 = 1$$

$$\begin{cases} y'^1 = e^{a^1} x'^1 \\ x'^2 = a^2 e^{a^1} x'^1 + e^{a^1} x'^2 \\ y'^3 = e^{a^3} x'^3 \\ y'^4 = e^{a^4} x'^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 = x'^1 \partial_1 + x'^2 \partial_2 \\ X_2 = x'^1 \partial_2 \\ X_3 = x'^3 \partial_3 \\ X_4 = x'^4 \partial_4 \end{cases}$$

$$8. \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = -\Gamma_{22}^1 = 1$$

$$\begin{cases} y'^1 = e^{a^1} (x'^1 \cos a^2 - x'^2 \sin a^2) \\ y'^2 = e^{a^1} (x'^1 \sin a^2 + x'^2 \cos a^2) \\ y'^3 = x'^3 + a^3 \\ y'^4 = x'^4 + a^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 = x'^1 \partial_1 + x'^2 \partial_2 \\ X_2 = -x'^1 \partial_1 + x'^2 \partial_2 \\ X_3 = \partial_3 \\ X_4 = \partial_4 \end{cases}$$

$$9. \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = -\Gamma_{22}^1 = \Gamma_{33}^3 = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'^1 = e^{a^1} (x'^1 \cos a^2 - x'^2 \sin a^2) \\ y'^2 = e^{a^1} (x'^1 \sin a^2 + x'^2 \cos a^2) \\ y'^3 = e^{a^3} x'^3 \\ y'^4 = x'^4 + a^4 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} X_1 = x'^1 \partial_1 + x'^2 \partial_2 \\ X_2 = -x'^2 \partial_1 + x'^1 \partial_2 \\ X_3 = x'^3 \partial_3 \\ X_4 = \partial_4 \end{array} \right.$$

$$10. \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = -\Gamma_{22}^1 = \Gamma_{33}^3 = \Gamma_{44}^4 = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'^1 = e^{a^1} (x'^1 \cos a^2 - x'^2 \sin a^2) \\ y'^2 = e^{a^1} (x'^1 \sin a^2 + x'^2 \cos a^2) \\ y'^3 = e^{a^3} x'^3 \\ y'^4 = e^{a^4} x'^4 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} X_1 = x'^1 \partial_1 + x'^2 \partial_2 \\ X_2 = -x'^2 \partial_1 + x'^1 \partial_2 \\ X_3 = x'^3 \partial_3 \\ X_4 = x'^4 \partial_4 \end{array} \right.$$

$$11. \Gamma_{11}^2 = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'^1 = x'^1 + a^1 \\ y'^2 = a^1 x'^1 + x'^2 + a^2 + \frac{1}{2} (a^1)^2 \\ y'^3 = x'^3 + a^3 \\ y'^4 = x'^4 + a^4 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} X_1 = \partial_1 + x'^1 \partial_2 \\ X_2 = \partial_2 \\ X_3 = \partial_3 \\ X_4 = \partial_4 \end{array} \right.$$

$$12. \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{33}^3 = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'^1 = x'^1 + a^1 \\ y'^2 = a^1 x'^1 + x'^2 + a^2 + \frac{1}{2} (a^1)^2 \\ y'^3 = e^{a^3} x'^3 \\ y'^4 = x'^4 + a^4 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} X_1 = \partial_1 + x'^1 \partial_2 \\ X_2 = \partial_2 \\ X_3 = x'^3 \partial_3 \\ X_4 = \partial_4 \end{array} \right.$$

$$13. \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{33}^3 = \Gamma_{44}^4 = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'^1 = x'^1 + a^1 \\ y'^2 = a^1 x'^1 + x'^2 + a^2 + \frac{1}{2} (a^1)^2 \\ y'^3 = e^{a^3} x'^3 \\ y'^4 = e^{a^4} x'^4 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} X_1 = \partial_1 + x'^1 \partial_2 \\ X_2 = \partial_2 \\ X_3 = x'^3 \partial_3 \\ X_4 = x'^4 \partial_4 \end{array} \right.$$

$$14. \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'^1 = e^{a^1} x'^1 \\ y'^2 = a^2 e^{a^1} x'^1 + e^{a^1} x'^2 \\ y'^3 = a^3 e^{a^1} x'^1 + e^{a^1} x'^3 \\ y'^4 = x'^4 + a^4 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} X_1 = x'^1 \partial_1 + x'^2 \partial_2 + x'^3 \partial_3 \\ X_2 = x'^1 \partial_2 \\ X_3 = x'^1 \partial_3 \\ X_4 = \partial_4 \end{array} \right.$$

$$15. \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{44}^4 = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'^1 = e^{a^1} x'^1 \\ y'^2 = a^2 e^{a^1} x'^1 + e^{a^1} x'^2 \\ y'^3 = a^3 e^{a^1} x'^1 + e^{a^1} x'^3 \\ y'^4 = e^{a^1} x'^4 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} X_1 = x'^1 \partial_1 + x'^2 \partial_2 + x'^3 \partial_3 \\ X_2 = x'^1 \partial_2 \\ X_3 = x'^1 \partial_3 \\ X_4 = x'^4 \partial_4 \end{array} \right.$$

$$16. \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{22}^2 = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'^1 = e^{a^1} x'^1 \\ y'^2 = a^2 e^{a^1} x'^1 + e^{a^1} x'^2 \\ y'^3 = \left[a^3 + \frac{1}{2} (a^2)^2 \right] e^{a^1} x'^1 + a^2 e^{a^1} x'^2 + e^{a^1} x'^3 \\ y'^4 = x'^4 + a^4 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} X_1 = x'^1 \partial_1 + x'^2 \partial_2 + x'^3 \partial_3 \\ X_2 = x'^1 \partial_2 + x'^2 \partial_3 \\ X_3 = x'^1 \partial_3 \\ X_4 = \partial_4 \end{array} \right.$$

$$17. \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{22}^2 = \Gamma_{44}^4 = 1.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'^1 = e^{a^1} x'^1 \\ y'^2 = a^2 e^{a^1} x'^1 + e^{a^1} x'^2 \\ y'^3 = \left[a^3 + \frac{1}{2} (a^2)^2 \right] e^{a^1} x'^1 + a^2 e^{a^1} x'^2 + e^{a^1} x'^3 \\ y'^4 = e^{a^1} x'^4 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} X_1 = x'^1 \partial_1 + x'^2 \partial_2 + x'^3 \partial_3 \\ X_2 = x'^1 \partial_2 + x'^2 \partial_3 \\ X_3 = x'^1 \partial_3 \\ X_4 = x'^4 \partial_4 \end{array} \right.$$

$$18. \Gamma_{12}^3 = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'^1 = x'^1 + a^1 \\ y'^2 = x'^2 + a^2 \\ y'^3 = a^2 x'^1 + a^1 x'^2 + x'^3 + a^3 + a^1 a^2 \\ y'^4 = x'^4 + a^4 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} X_1 = \partial_1 + x'^2 \partial_3 \\ X_2 = \partial_2 + x'^1 \partial_3 \\ X_3 = \partial_3 \\ X_4 = \partial_4 \end{array} \right.$$

$$19. \Gamma_{12}^3 = \Gamma_{44}^4 = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'^1 = x'^1 + a^1 \\ y'^2 = x'^2 + a^2 \\ y'^3 = a^2 x'^1 + a^1 x'^2 + x'^3 + a^3 + a^1 a^2 \\ y'^4 = e^{a^4} x'^4 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} X_1 = \partial_1 + x'^2 \partial_3 \\ X_2 = \partial_2 + x'^1 \partial_3 \\ X_3 = \partial_3 \\ X_4 = x'^4 \partial_4 \end{array} \right.$$

$$20. \Gamma_{11}^3 = \Gamma_{22}^3 = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'^1 = x'^1 + a^1 \\ y'^2 = x'^2 + a^2 \\ y'^3 = a^1 x'^1 + a^2 x'^2 + x'^3 + a^3 + \\ \quad + \frac{1}{2} (a^1)^2 + \frac{1}{2} (a^2)^2 \\ y'^4 = x'^4 + a^4 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} X_1 = \partial_1 + x'^1 \partial_3 \\ X_2 = \partial_2 + x'^2 \partial_3 \\ X_3 = \partial_3 \\ X_4 = \partial_4 \end{array} \right.$$

$$21. \Gamma_{11}^3 = \Gamma_{22}^3 = \Gamma_{44}^4 = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'^1 = x'^1 + a^1 \\ y'^2 = x'^2 + a^2 \\ y'^3 = a^1 x'^1 + a^2 x'^2 + x'^3 + a^3 + \frac{1}{2} (a^1)^2 + \frac{1}{2} (a^2)^2 \\ y'^4 = e^{a^4} x'^4 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} X_1 = \partial_1 + x'^1 \partial_3 \\ X_2 = \partial_2 + x'^2 \partial_3 \\ X_3 = \partial_3 \\ X_4 = x'^4 \partial_4 \end{array} \right.$$

$$22. \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^3 = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'^1 = x'^1 + a^1 \\ y'^2 = a^1 x'^1 + x'^2 + a^2 + \frac{1}{2} (a^1)^3 \\ y'^3 = \left[a^2 + \frac{1}{2} (a^1)^2 \right] x'^1 + a^1 x'^2 + x'^3 + a^3 + a^1 a^2 + \\ \quad + \frac{1}{6} (a^1)^3 \\ y'^4 = x'^4 + a^4 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} X_1 = \partial_1 + x'^1 \partial_2 + x'^2 \partial_3 \\ X_2 = \partial_2 + x'^1 \partial_3 \\ X_3 = \partial_3 \\ X_4 = \partial_4 \end{array} \right.$$

$$23. \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^3 = \Gamma_{44}^4 = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'^1 = x'^1 + a_1 \\ y'^2 = x'^2 + a^2 + \frac{1}{2} (a^1)^2 \\ y'^3 = \left[a^2 + \frac{1}{2} (a^1)^2 \right] x'^1 + a^1 x'^2 + x'^3 + a^3 + \\ \quad + \frac{1}{2} (a^1)^2 + \frac{1}{2} (a^2)^2 \\ y'^4 = e^{a^4} x'^4 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} X_1 = \partial_1 + x'^1 \partial_2 + x'^2 \partial_3 \\ X_2 = \partial_2 + x'^1 \partial_3 \\ X_3 = \partial_3 \\ X_4 = x'^4 \partial_4 \end{array} \right.$$

$$24. \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{33}^4 = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'^1 = x'^1 + a^1 \\ y'^2 = a^1 x'^1 + x'^2 + a^2 + \frac{1}{2} (a^1)^2 \\ y'^3 = x'^3 + a^3 \\ y'^4 = a^3 x'^3 + x'^4 + a^4 + \frac{1}{2} (a^3)^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} X_1 = \partial_1 + x'^1 \partial_2 \\ X_2 = \partial_2 \\ X_3 = \partial_3 + x'^3 \partial_4 \\ X_4 = \partial_4 \end{array}$$

$$25. \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = -\Gamma_{22}^1 = \Gamma_{33}^4 = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'^1 = e^{a^1} (x'^1 \cos a^2 - x'^2 \sin a^2) \\ y'^2 = e^{a^1} (x'^1 \sin a^2 + x'^2 \cos a^2) \\ y'^3 = x'^3 + a^3 \\ y'^4 = a^3 x'^3 + x'^4 + a^4 + \frac{1}{2} (a^3)^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} X_1 = x'^1 \partial_1 + x'^2 \partial_2 \\ X_2 = -x'^2 \partial_1 + x'^1 \partial_2 \\ X_3 = \partial_3 + x'^3 \partial_4 \\ X_4 = \partial_4 \end{array}$$

$$26. \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{33}^4 = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'^1 = e^{a^1} x'^1 \\ y'^2 = a^2 e^{a^1} x'^1 + e^{a^1} x'^2 \\ y'^3 = x'^3 + a^3 \\ y'^4 = a^3 x'^3 + x'^4 + a^4 + \frac{1}{2} (a^3)^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} X_1 = x'^1 \partial_1 + x'^2 \partial_2 \\ X_2 = x'^1 \partial_2 \\ X_3 = \partial_3 + x'^3 \partial_4 \\ X_4 = \partial_4 \end{array}$$

$$27. \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = -\Gamma_{22}^1 = \Gamma_{33}^3 = \Gamma_{34}^4 = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'^1 = e^{a^1} (x'^1 \cos a^2 - x'^2 \sin a^2) \\ y'^2 = e^{a^1} (x'^1 \sin a^2 + x'^2 \cos a^2) \\ y'^3 = e^{a^3} x'^3 \\ y'^4 = a^4 e^{a^3} x'^3 + e^{a^3} x'^4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} X_1 = x'^1 \partial_1 + x'^2 \partial_2 \\ X_2 = -x'^2 \partial_1 + x'^1 \partial_2 \\ X_3 = x'^3 \partial_3 + x'^4 \partial_4 \\ X_4 = x'^3 \partial_4 \end{array}$$

$$28. \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = -\Gamma_{22}^1 = \Gamma_{33}^3 = \Gamma_{34}^4 = -\Gamma_{44}^3 = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'^1 = e^{a^1} (x'^1 \cos a^2 - x'^2 \sin a^2) \\ y'^2 = e^{a^1} (x'^1 \sin a^2 + x'^2 \cos a^2) \\ y'^3 = e^{a^3} (x'^3 \cos a^4 - x'^4 \sin a^4) \\ y'^4 = e^{a^3} (x'^3 \sin a^4 + x'^4 \cos a^4) \end{array} \right\} \begin{array}{l} X_1 = x'^1 \partial_1 + x'^2 \partial_2 \\ X_2 = -x'^2 \partial_1 + x'^1 \partial_2 \\ X_3 = x'^3 \partial_3 + x'^4 \partial_4 \\ X_4 = -x'^4 \partial_3 + x'^3 \partial_4 \end{array}$$

$$29. \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{33}^3 = \Gamma_{34}^4 = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'^1 = e^{a^1} x'^1 \\ y'^2 = a^2 e^{a^1} x'^1 + e^{a^1} x'^2 \\ y'^3 = e^{a^3} x'^3 \\ y'^4 = a^4 e^{a^3} x'^3 + e^{a^3} x'^4 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} X_1 = x'^1 \partial_1 + x'^2 \partial_2 \\ X_2 = \quad \quad \quad x'^1 \partial_2 \\ X_3 = \quad \quad \quad x'^3 \partial_3 + x'^4 \partial_4 \\ X_4 = \quad \quad \quad x'^3 \partial_4 \end{array} \right.$$

$$30. \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{14}^4 = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'^1 = e^{a^1} x'^1 \\ y'^2 = a^2 e^{a^1} x'^1 + e^{a^1} x'^2 \\ y'^3 = a^3 e^{a^1} x'^1 + e^{a^1} x'^3 \\ y'^4 = a^4 e^{a^1} x'^1 + e^{a^1} x'^4 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} X_1 = x'^1 \partial_1 + x'^2 \partial_2 + x'^3 \partial_3 + x'^4 \partial_4 \\ X_2 = \quad \quad \quad x'^1 \partial_2 \\ X_3 = \quad \quad \quad x'^1 \partial_3 \\ X_4 = \quad \quad \quad x'^1 \partial_4 \end{array} \right.$$

$$31. \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{14}^4 = \Gamma_{33}^3 = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'^1 = e^{a^1} x'^1 \\ y'^2 = a^2 e^{a^1} x'^1 + e^{a^1} x'^2 \\ y'^3 = a^3 e^{a^1} x'^1 + e^{a^1} x'^3 \\ y'^4 = \left[a^4 + \frac{1}{2} (a^3)^2 \right] e^{a^1} x'^1 + \\ \quad + a^3 e^{a^1} x'^3 + e^{a^1} x'^4 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} X_1 = x'^1 \partial_1 + x'^2 \partial_2 + x'^3 \partial_3 + x'^4 \partial_4 \\ X_2 = \quad \quad \quad x'^1 \partial_2 \\ X_3 = \quad \quad \quad x'^1 \partial_3 + x'^3 \partial_4 \\ X_4 = \quad \quad \quad x'^1 \partial_4 \end{array} \right.$$

$$32. \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{14}^4 = \Gamma_{23}^4 = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'^1 = e^{a^1} x'^1 \\ y'^2 = a^2 e^{a^1} x'^1 + e^{a^1} x'^2 \\ y'^3 = a^3 e^{a^1} x'^1 + e^{a^1} x'^3 \\ y'^4 = [a^4 + a^2 a^3] e^{a^1} x'^1 + a^3 e^{a^1} x'^2 + a^2 e^{a^1} x'^3 + e^{a^1} x'^4 \end{array} \right.$$

cu operatorii

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1 = x'^1 \partial_1 + x'^2 \partial_1 + x'^3 \partial_3 + x'^4 \partial_4 \\ X_2 = \quad \quad \quad x'^1 \partial_2 \quad \quad + x'^3 \partial_4 \\ X_3 = \quad \quad \quad x'^1 \partial_3 + x'^2 \partial_4 \\ X_4 = \quad \quad \quad x'^1 \partial_4 \end{array} \right.$$

$$33. \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{14}^4 = \Gamma_{22}^4 = \Gamma_{33}^4 = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'^1 = e^{a^1} x'^1 \\ y'^2 = a^2 e^{a^1} x'^1 + e^{a^1} x'^2 \\ y'^3 = a^3 e^{a^1} x'^1 + e^{a^1} x'^3 \\ y'^4 = \left[a^4 + \frac{1}{2} ((a^2)^2 + (a^3)^2) \right] e^{a^1} x'^1 + a^2 e^{a^1} x'^2 + a^3 e^{a^1} x'^3 + e^{a^1} x'^4 \end{array} \right.$$

cu operatorii

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1 = x'^1 \partial_1 + x'^2 \partial_2 + x'^3 \partial_3 + x'^4 \partial_4 \\ X_2 = \quad \quad \quad x'^1 \partial_2 \quad \quad \quad + x'^2 \partial_4 \\ X_3 = \quad \quad \quad \quad \quad \quad x'^1 \partial_3 + x'^3 \partial_4 \\ X_4 = \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad x'^1 \partial_4 \end{array} \right.$$

$$34. \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{14}^4 = \Gamma_{22}^3 = \Gamma_{23}^4 = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'^1 = e^{a^1} x'^1 \\ y'^2 = a^2 e^{a^1} x'^1 + e^{a^1} x'^2 \\ y'^3 = \left[a^3 + \frac{1}{2} (a^2)^2 \right] e^{a^1} x'^1 + a^2 e^{a^1} x'^2 + e^{a^1} x'^3 \\ y'^4 = \left[a^4 + a^2 a^3 + \frac{1}{6} (a^2)^3 \right] e^{a^1} x'^1 + \left[a^3 + \frac{1}{2} (a^2)^2 \right] e^{a^1} x'^2 + a^2 e^{a^1} x'^3 + e^{a^1} x'^4 \end{array} \right.$$

cu operatorii

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1 = x'^1 \partial_1 + x'^2 \partial_2 + x'^3 \partial_3 + x'^4 \partial_4 \\ X_2 = \quad \quad \quad x'^1 \partial_2 + x'^2 \partial_3 + x'^3 \partial_4 \\ X_3 = \quad \quad \quad \quad \quad \quad x'^1 \partial_3 + x'^2 \partial_4 \\ X_4 = \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad x'^1 \partial_4 \end{array} \right.$$

$$35. \Gamma_1^{11} = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{14}^4 = \Gamma_{23}^4 = -\Gamma_{33}^1 = -\Gamma_{34}^2 = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'^1 = e^{a^1} \cos a^3 x'^1 - [a^2 \cos a^3 - a^4 \sin a^3] e^{a^1} x'^3 \\ y'^2 = e^{a^1} \sin a^3 x'^1 + e^{a^1} \cos a^3 x'^2 - [a^2 \sin a^3 + a^4 \cos a^3] e^{a^1} x'^3 - \\ \quad \quad \quad - [a^2 \cos a^3 - a^4 \sin a^3] e^{a^1} x'^4 \\ y'^3 = [a^2 \cos a^3 - a^4 \sin a^3] e^{a^1} x'^1 + e^{a^1} \cos a^3 x'^3 \\ y'^4 = [a^2 \sin a^3 + a^4 \cos a^3] e^{a^1} x'^1 + [a^2 \cos a^3 - a^4 \sin a^3] e^{a^1} x'^2 + \\ \quad \quad \quad + e^{a^1} \sin a^3 x'^3 + e^{a^1} \cos a^3 x'^4 \end{array} \right.$$

ai cărui operatori sînt

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1 = x'^1 \partial_1 + x'^2 \partial_2 + x'^3 \partial_3 + x'^4 \partial_4 \\ X_2 = -x'^3 \partial_1 - x'^4 \partial_2 + x'^1 \partial_3 + x'^2 \partial_4 \\ X_3 = x'^1 \partial_2 + x'^3 \partial_4 \\ X_4 = x'^3 \partial_2 + x'^1 \partial_4 \end{array} \right.$$

$$36. \Gamma_{11}^4 = \Gamma_{22}^4 = \Gamma_{33}^4 = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'^1 = x'^1 + a^1 \\ y'^2 = x'^2 + a^2 \\ y'^3 = x'^3 + a^3 \\ y'^4 = a^1 x'^1 + a^2 x'^2 + a^3 x'^3 + x'^4 + a^4 + \\ \quad + \frac{1}{2} [(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2] \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} X_1 = \partial_1 + x'^1 \partial_4 \\ X_2 = \partial_2 + x'^2 \partial_4 \\ X_3 = \partial_3 + x'^3 \partial_4 \\ X_4 = \partial_4 \end{array} \right.$$

$$37. \Gamma_{11}^4 = \Gamma_{23}^4 = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'^1 = x'^1 + a^1 \\ y'^2 = x'^2 + a^2 \\ y'^3 = x'^3 + a^3 \\ y'^4 = a^1 x'^1 + a^3 x'^2 + a^2 x'^3 + \\ \quad + x'^4 + a^4 + \frac{1}{2} [(a^1)^2 + 2a^2 a^3] \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} X_1 = \partial_1 + x'^1 \partial_4 \\ X_2 = \partial_2 + x'^3 \partial_4 \\ X_3 = \partial_3 + x'^2 \partial_4 \\ X_4 = \partial_4 \end{array} \right.$$

$$38. \Gamma_{12}^3 = \Gamma_{11}^4 = \Gamma_{22}^4 = 1^*)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'^1 = x'^1 + a^1 \\ y'^2 = x'^2 + a^2 \\ y'^3 = a^2 x'^2 + a^1 x'^2 + x'^3 + a^3 + a^1 a^2 \\ y'^4 = a^1 x'^1 + a^2 x'^2 + x'^4 + a^4 + \\ \quad + \frac{1}{2} ((a^1)^2 + (a^2)^2) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} X_1 = \partial_1 + x'^2 \partial_3 + x'^1 \partial_4 \\ X_2 = \partial_2 + x'^1 \partial_3 + x'^2 \partial_4 \\ X_3 = \partial_3 \\ X_4 = \partial_4 \end{array} \right.$$

*) Transf. 24 se obține din 38 prin compunere cu:

$$\begin{array}{ll} x'^1 = \frac{1}{2} (x^1 + x^3) & x'^3 = \frac{1}{2} (x^2 - x^4) \\ x'^2 = \frac{1}{2} (x^1 - x^3) & x'^4 = \frac{1}{2} (x^2 + x^4) \end{array}$$

$$39. \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^3 = \Gamma_{13}^4 = \Gamma_{22}^4 = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'^1 = x'^1 + a^1 \\ y'^2 = a^1 x'^1 + x'^2 + a^2 + \frac{1}{2} (a^1)^2 \\ y'^3 = \left[a^2 \frac{1}{2} (a^1)^2 \right] x'^1 + a^1 x'^2 + x'^3 + a^3 + a^1 a^2 + \frac{1}{6} (a^1)^3 \\ y'^4 = \left[a^3 + a^1 a^2 + \frac{1}{6} (a^1)^3 \right] x'^1 + \left[a^2 + \frac{1}{2} (a^1)^2 \right] x'^2 + a^1 x'^3 + x'^4 + \\ \quad + a^4 + a^1 a^3 + \frac{1}{2} (a^2)^2 + \frac{1}{2} (a^1)^2 a^2 + \frac{1}{24} (a^1)^4 \end{array} \right.$$

ai cărui operatori sînt:

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1 = \partial_1 + x'^1 \partial_2 + x'^2 \partial_3 + x'^3 \partial_4 \\ X_2 = \partial_2 + x'^1 \partial_3 + x'^2 \partial_4 \\ X_3 = \partial_3 + x'^1 \partial_4 \\ X_4 = \partial_4 \end{array} \right.$$

$$40. \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^4 = \Gamma_{33}^4 = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y'^1 = x'^1 + a^1 \\ y'^2 = a^1 x'^1 + x'^2 + a^2 + \frac{1}{2} (a^1)^2 \\ y'^3 = x'^3 + a^3 \\ y'^4 = \left[a^2 + \frac{1}{2} (a^1)^2 \right] x'^1 + a^1 x'^2 + a^3 x'^3 + x'^4 + a^4 + a^1 a^2 + \frac{1}{2} (a^3)^2 + \frac{1}{6} (a^1)^3 \end{array} \right.$$

ai cărui operatori sînt:

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1 = \partial_1 + x'^1 \partial_2 + x'^2 \partial_4 \\ X_2 = \partial_2 + x'^1 \partial_4 \\ X_3 = \partial_3 + x'^3 \partial_{34} \\ X_4 = \partial_4 \end{array} \right.$$

Există deci 39 de grupuri lineare abeliene cu 4 parametri neizomorfe dintre care 9 conțin parametrii sub formă polinomială și anume cazurile: 11, 18, 20, 22, 36, 37, 38, 39, 40. Aceste grupuri corespund la A_4 cu algebră asociată nilpotentă. De asemenea mai rezultă că există 11 cazuri în care variabilele nu se separă, ce corespund la spații A_4 ireductibile și anume cazurile: 30, 31, ..., 40; ultimele 5 cazuri corespund la spații A_4 cu algebră asociată nilpotentă ireductibilă.

Din cele de mai sus rezultă următoarele teoreme:

I. Grupurile liniare abeliene local tranzitive cu n parametri sînt date de formulele:

$$(1) \quad y'^i = \Gamma_{jk}^i \varphi_0^j x'^k + x'^i + \varphi_0^i \quad (i = 1, \dots, n; j, k < i; \Gamma_k = 0)$$

$$(2) \quad y'^i = \Gamma_{jk}^i \varphi_0^j x'^k \quad (i = 1, \dots, n; \Gamma_k \neq 0)$$

unde $\varphi_0^j = \varphi^j(a^1, \dots, a^n)$, φ^j fiind funcțiile ce realizează echivalența spațiului A_n cu spațiul euclidian E_n .

II. Numărul grupurilor liniare comutative și local tranzitive cu 2 parametri care operează în spațiul E_2 este 5; numai cazul V conține parametrii sub formă polinomială.

III. Numărul grupurilor liniare comutative și local tranzitive cu 3 parametri este 14; cazurile VIII, XII, XIII și XIV conțin parametrii sub formă polinomială.

IV. Numărul grupurilor liniare comutative și local tranzitive cu 4 parametri este 39 dintre care 9 cazuri conțin parametrii sub formă polinomială.

Observație. Dacă spațiul A este reductibil, adică $A_n = A_{p_1} \times \dots \times A_{p_s}$ ($p_1 + \dots + p_s = n$), atunci grupul G_n corespunzător este cu variabile și parametri separabili, ceea ce înseamnă că el se compune din s subgrupuri în $p_1, \dots, p_s$ variabile și parametri.

BIBLIOGRAFIE

1. I. Drăghici: Asupra clasificării algebrelor lineare asociative și comutative de rang finit (sub tipar)
2. C. Teleman: Asupra spațiilor cu conexiune afină constantă și local euclidiană. Stud. și Cercet. mat. 1966 tom. 18
3. G. Vrăncianu: Lecții de Geometrie diferențială vol. II. ed. 1964, pag. 329.

Primit la redacție la 15.X.1968.

О ЛИНЕЙНЫХ КОММУТАТИВНЫХ ЛОКАЛЬНО-ТРАНЗИТИВНЫХ ГРУППАХ С 2, 3 И 4 ПАРАМЕТРАМИ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В настоящей работе изучаются коммутативные линейные группы локально-транзитивные, которые оперируют в евклидовых пространствах с 2, 3 и 4 размерами.

Задача связана с классификацией линейных коммутативных и ассоциативных алгебр. Выводятся теоремы:

1. Линейные коммутативные локально-транзитивные группы даны формулами:

$$(1) \quad y'^i = \Gamma_{jk}^i \varphi_0^j x'^k + x'^i + \varphi_0^i \quad (i = 1, \dots, n; \Gamma_k = 0)$$

$$(2) \quad y'^i = \Gamma_{jk}^i \varphi_0^j x'^k \quad (i = 1, \dots, n; \Gamma_k \neq 0)$$

где $\varphi_0^i = \varphi^i(a^1, \dots, a^n)$, φ^i — являются функциями, которыми выполняется эквивалентность пространства A_n с евклидовским пространством E_n .

2. Существуют 5 коммутативных локально-транзитивных групп, среди которых только одна содержит параметры под видом полимонов, и именно пятый случай.

3. Существуют 14 коммутативных локально-транзитивных групп с 3-мя параметрами среди которых только 4, именно VIII, XII, XIII и XIV-й случаи, содержат параметры под видом полимонов.

4. Существуют 39 коммутативных локально-транзитивных групп с 4-мя параметрами, которые неизоморфны, среди которых 9 групп содержат параметры под видом полимонов.

SUR LES GROUPES LINÉAIRES COMMUTATIFS ET LOCALEMENT TRANSITIFS À 2,3 ET 4 PARAMÈTRES.

R É S U M É

Dans ce travail on étudie les groupes linéaires commutatifs et localement transitifs opérant dans les espaces euclidiens à 2,3 et 4 dimensions. On donne les théorèmes suivants:

I. Les groupes linéaires commutatifs et localement transitifs sont donnés par des formules de la forme

$$1) \quad y'^i = \Gamma_{jk}^i \varphi_0^j x'^k + x'^i + \varphi_0^i \quad (i = 1, \dots, n; j, k < i; \Gamma_k = 0),$$

$$(2) \quad y'^i = \Gamma_{jk}^i \varphi_0^j x'^k \quad (i = 1, \dots, n; \Gamma_k \neq 0)$$

ou $\varphi_0^j = \varphi^j(a^1, \dots, a^n)$ étant les fonctions qui réalisent l'équivalence entre les espaces A_n et E_n

II. Le nombre des groupes linéaires commutatifs et localement transitifs à 2 paramètres opérant dans l'espace E_2 est 5; seulement le cas V contient les paramètres sous la forme polynômiale.

III. Le nombre des groupes linéaires commutatifs et localement transitifs à 3 paramètres est 14; les cas VIII, XII, XIII et XIV contiennent les paramètres sous la forme polynômiale.

IV. Le nombre des groupes linéaires commutatifs et localement transitifs à 4 paramètres est 39, dont 9 contiennent les paramètres sous la forme polynômiale.

Observation. Si l'espace A_n est réductible: $A_n = A_{p_1} \times A_{p_2} \times \dots \times A_{p_s}$ ($p_1 + \dots + p_s = n$) alors le groupe G_n correspondant est aux variables et paramètres séparables c'est-à-dire qu'il se compose des sousgroupes en $p_1, \dots, p_s$ variables et paramètres.

REPREZENTAREA UNOR SPAȚII RETICULATE LOCAL CONVEXE

G. H. GRIGORE

În această lucrare se reprezintă pe un spațiu de funcții continui un tip de spații reticulate local convexe introduse în [2]. Terminologia și notațiile sînt cele din [1].

§1.01. Într-un spațiu liniar reticulat X , un element unitate u este numit unitate tare, ([1]), dacă pentru orice $x \in X$ există un număr real ξ astfel încît $|x| \leq \xi u$.

Dacă X este arhimedian, funcționala dată de formula $\|x\| = \inf \{\xi \mid |x| \leq \xi u\}$ este o normă pe X și cu această normă X devine un spațiu reticulat normat*) ([1]). În ceea ce urmează, orice spațiu cu unitate tare va fi normat ca mai sus.

Un spațiu liniar σ reticulat, cu unitate, X se numește spațiu cu M unitate ([3]) dacă în el există o mulțime totală D de elemente unitare cu proprietatea următoare: pentru orice $x \in X$ și orice $d \in D$ există un număr real ξ , astfel încît, dacă u este unitatea spațiului, să avem

$$[d] \mid x \mid \leq \xi u \quad (1)$$

unde $[d]$ este proiectorul generat de elementul d . Relația precedentă este echivalentă cu relația:

$$[d] \mid x \mid \leq \xi d \quad (2)$$

Pentru fiecare $d \in D$, funcționala dată de formula

$$\|x\| = \inf \{\xi \mid [d] \mid x \mid \leq \xi d\} \quad (3)$$

este o seminormă pe X iar familia acestor seminorme este o familie suficientă de seminorme ([2]).

În [4] se demonstrează următoarea teoremă:

Teorema 1. Fie X un spațiu complet reticulat cu unitate tare. Există atunci un spațiu Hausdorff compact K așa ca X să fie izomorf, ca spațiu reticulat normat, cu $\mathcal{C}(K, R)$.

În demonstrația acestei teoreme, în [4], sînt utilizate următoarele leme:

* $|x_1| \leq |x_2| \Rightarrow \|x_1\| \leq \|x_2\|$

Lema 1. Fie X un spațiu reticulat normat. Dacă f este o funcțională liniară, continuă și de normă unitate pe X iar $x_0 \in X$, $x_0 \geq 0$, $\|x_0\| = 1$ și $f(x_0) = 1$ atunci f este o funcțională pozitivă.

Lema 2. Fie X un spațiu reticulat normat. Dacă f este o funcțională liniară, continuă și de normă unitate pe X , $x_0, y \in X$, $x_0 > 0$, $\|x_0\| = 1$, $f(x_0) = 1$ iar $x_0 \wedge y = 0$ atunci $f(y) = 0$.

Lema 3. Dacă X este un spațiu complet reticulat, cu unitate tare u iar f este o funcțională liniară și continuă pe X atunci $f(u) = \|f\|$.

În teorema 1 mulțimea K este formată din funcționalele liniare, continui, de normă unitate, pozitive și disjunctive *) pe X , și se organizează ca spațiu topologic cu topologia slabă. Funcționalele din K au și proprietatea $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$. Izomorfismul din teorema 1 este aplicația $x \rightarrow F_x$ unde $F_x(f) = f(x)$ pentru $f \in K$.

§ 2. În acest paragraf vom presupune că X este un spațiu complet reticulat.

Teorema 2. Dacă X este un spațiu cu M unitate, topologic complet, atunci există un spațiu Hausdorff local compact Ω , astfel încît, X să fie izomorf, ca spațiu reticulat local convex, cu $\mathcal{C}(\Omega, R)^{**}$

Demonstrație: Putem presupune că odată cu orice parte finită E a lui D , $\sup E$ și $\inf E$ aparțin lui D . Pentru fiecare $d \in D$ să considerăm $X_d = [d]X \cdot X_d$ este un spațiu complet reticulat avînd pe d ca unitate tare. Atunci X_d este un spațiu reticulat Banach ([1]). Conform teoremei 1 X_d este izomorf, ca spațiu reticulat normat, cu $\mathcal{C}(K_d, R)$ unde K_d este mulțimea funcționalelor liniare, continui, de normă unitate și disjunctive pe X_d . Este ușor de observat că dacă $d_1, d_2 \in D$, $d_1 \leq d_2$ atunci spațiul normat X_{d_1} este un subspațiu al spațiului normat X_{d_2} .

Propoziția 1. Dacă $d_1, d_2 \in D$, $d_1 \leq d_2$ atunci K_{d_1} este homeomorf cu o parte a lui K_{d_2} .

Demonstrație: Fie $f_1 \in K_{d_1}$. Atunci, conform lemei 3, $f_1(d_1) = \|f_1\| = 1$. Prelungim pe f_1 la o funcțională liniară și continuă f_2 pe X_{d_2} așa că $\|f_2\| = 1$. Atunci $f_2(d_2) = 1$ și conform lemei 1 f_2 este o funcțională pozitivă. Dacă $x, y \in X_{d_2}$ și $x \wedge y = 0$ atunci $[d_1]x \wedge [d_1]y = 0$ și deoarece f_1 este disjunctivă $f_1([d_1]x) \cdot f_1([d_1]y) = 0$. Dacă de exemplu $f_1([d_1]x) = 0$ și $x' = x - [d_1]x$ atunci $[d_2 - d_1]x' = x'$ și deci există un număr real ξ astfel încît $|x'| \leq \xi (d_2 - d_1)$. Atunci $f_2(|x'|) \leq \xi f_2(d_2 - d_1) = 0$ și deci $f_2(x') = 0$. Deoarece $f_2([d_1]x) = 0$ rezultă că $f_2(x) = 0$ și deci f_2 este disjunctivă. Se observă că prelungirea lui f_1 la f_2 făcută mai sus, este unică și se realizează după formula:

$$f_2(x) = f_1([d_1]x) \text{ pentru } x \in X_{d_2} \quad (4)$$

Vom considera aplicația h definită pe K_{d_1} cu valori în K_{d_2} prin $h(f_1) = f_2$. Fie $V(f_2, x_1, \dots, x_n, \varepsilon) = \{f \mid f \in K_{d_2}, |f(x_i) - f_2(x_i)| < \varepsilon, x_i \in X_{d_2}, i = 1, \dots, n\}$. Se verifică ușor că

$$h^{-1}(V(f_2, x_1, \dots, x_n, \varepsilon)) = \{f \mid f \in K_{d_1}, |f([d_1]x_i) - f_1([d_1]x_i)| < \varepsilon, i = 1, \dots, n\}$$

*) f se zice disjunctivă dacă $(x \wedge y = 0 \Rightarrow f(x) \cdot f(y) = 0)$

**) $\mathcal{C}(R, \Omega)$ se înzestrează cu topologia convergenței uniforme pe o anumită familie de părți compacte ale lui Ω .

deci h este continuă. Deoarece K_d este compact și separat este un homeomorfism. Propoziția este demonstrată.

Să notăm cu $K = \bigcup_{d \in D} K_d$. Introducem pe K următoarea relație de echivalență: spunem că $f_1, f_2 \in K$ sînt echivalente dacă există $f_3 \in K$ astfel încît f_3 să fie o prelungire pentru f_1 și f_2 . Vom nota cu Ω spațiul factor obținut din K prin această relație de echivalență, cu π aplicația canonică de la K pe Ω , cu π_d restricția aplicației π la K_d și $\Omega_d = \pi(K_d)$. Pe Ω_d vom considera cea mai tare topologie în care π_d este continuă. Aplicația π_d fiind o injecție iar K_d compact, π_d este un homeomorfism iar Ω_d este compact și separat. Dacă $d_1, d_2 \in D$ atunci $\Omega_{d_1} \subset \Omega_{d_2}$.

$$\begin{array}{ccc} K_{d_1} & \xrightarrow{h} & K_{d_2} \\ \pi_{d_1} \uparrow & & \uparrow \pi_{d_2} \\ \Omega_{d_1} & \xrightarrow{I} & \Omega_{d_2} \end{array} \quad (5)$$

unde I este aplicația identică este comutativă și deci I este continuă. Deoarece Ω_d sînt compacte și separate I este un homeomorfism. Fie $\Omega = \bigcup_{d \in D} \Omega_d$ și pe Ω topologia limită inductivă. Se verifică imediat că orice mulțime deschisă în Ω_d este o mulțime deschisă în Ω și deci Ω este un spațiu topologic separat, Ω_d sînt deschise în Ω și prin urmare Ω este un spațiu topologic Hausdorff, local compact. Izomorfismul din teorema 2 îl construim astfel: fiecărui $x \in X$ îi corespunde aplicația G_x definită pe Ω unde pentru

$$\tilde{f} \in \Omega_d, G_x(\tilde{f}) = f([d]x) \text{ în care } f \in \tilde{f} \cap K_d \quad (6)$$

Să arătăm că G_x este continuă. Într-adevăr restricția lui G_x la Ω_d este $\pi_d^{-1} \circ F_{[d]x}$, unde $F_{[d]x}$ este aplicația definită pe K_d ca la teorema 1. Restricția lui G_x la Ω_d este deci continuă pentru orice $d \in D$ și deci G_x este continuă pe Ω .

Propoziția 2. Aplicația $x \rightarrow G_x$, definită pe X cu valori în $\mathcal{C}(\Omega, R)$ este o bijecție.

Demonstrație. Dacă $x', x'' \in X$ și $x' \neq x''$, există $d \in D$ astfel încît $[d]x' \neq [d]x''$ și conform teoremei 1 există $f \in K_d$ așa ca $f([d]x') \neq f([d]x'')$ și deci $G_{x'} \neq G_{x''}$. Să arătăm acum că aplicația este o surjecție. Fie $G \in \mathcal{C}(\Omega, R)$. Restricția, G_d , a lui G la Ω_d este continuă, pentru orice $d \in D$ și deci $F = \pi_d \circ G_d$ este continuă pe Ω_d . Conform teoremei 1 există și este unic un element $x_d \in X_d$ astfel ca $F = F_{x_d}$. Avem deci

$$G(\tilde{f}) = f(x_d) \quad (7)$$

unde $f \in \Omega_d$ iar $f \in \tilde{f} \cap K_d$. Șirul generalizat $\{x_d\}_{d \in D}$ are următoarea proprietate: dacă $d_1, d_2 \in D$ și $d_1 \leq d_2$ atunci

$$x_{d_1} = [d_1]x_{d_2} \quad (8)$$

Într-adevăr, fie $\tilde{f}_1 \in \Omega_{d_1}$. Atunci $G(\tilde{f}_1) = f_1(x_{d_1})$ unde $f_1(x_{d_1})$ unde $f_1 \in \tilde{f}_1 \cap K_{d_1}$. Fie f_2 prelungirea lui f_1 la X_{d_2} ca în propoziția 1. Atunci $\tilde{f}_2 = \tilde{f}_1$ și deci $f_2(x_{d_2}) = f_1(x_{d_1})$. Dar $f_2(x_{d_2}) = f_1([d_1]x_{d_2})$, și prin urmare $f_1([d_1]x_{d_2}) = f_1(x_{d_1})$ pentru orice $f_1 \in K_{d_1}$. Din teorema 1 rezultă atunci că $x_{d_1} = [d_1]x_{d_2}$. Cu ajutorul relației (6) se demonstrează imediat că pentru orice $d_1, d_2 \in D$ avem:

$$[d_1]x_{d_2} = [d_2]x_{d_1} = x_{d_1 \wedge d_2} \quad (9)$$

Din (7) rezultă ușor că $\{x_d\}_{d \in D}$ este un sir Cauchy în X . Fie atunci $x = \lim_{d \in D} x_d$.

Pentru orice $d \in D$ avem

$$[d]x = x_d \quad (10)$$

Într-adevăr pentru orice $\varepsilon > 0$ există $d_0 \in D$, $d_0 \geq d$, așa ca, dacă $d' \geq d_0$ atunci $\|x - x_{d'}\|_d < \varepsilon$ de unde, folosind (3) și (7) rezultă că $\|[d]x - x_d\| < \varepsilon d$ și deci $[d]x = x_d$. Din (7), (10) și (6) rezultă atunci că $G = G_x$ și propoziția este demonstrată.

Propoziția 4. Aplicația $x \rightarrow G_x$ este un izomorfism de spații reticulate. (În $\mathcal{C}(\Omega, R)$ considrăm ordinea obișnuită). Într-adevăr $G_x \times_y (\tilde{f}) = f([d]x \wedge y) = f([d]x \wedge [d]y) = F_{[d]x \times [d]y}(f) = F_{[d]x}(f) \wedge F_{[d]y}(f) = G_x(\tilde{f}) \wedge G_y(\tilde{f}) = (G_x \wedge G_y)(\tilde{f})$. Ultima egalitate rezultă din propoziția 3.

Spațiul $\mathcal{C}(\Omega, R)$, cu familia de seminorme $\{\|G_x\|_d = \max_{\tilde{f} \in \Omega_d} |G_x(\tilde{f})|, d \in D\}$, este un spațiu local convex separat.

Propoziția 4. Aplicația $x \rightarrow G_x$ este un izomorfism de spații local convexe.

Demonstrație. Într-adevăr $\|G_x\|_d = \max_{f \in K_d} |f([d]x)| = \max_{f \in K_d} |F_{[d]x}(f)| = \|F_{[d]x}\| = \|[d]x\|_d = \|x\|_d$

Propoziția este demonstrată. Propozițiile 2, 3 și 4 demonstrează teorema 2.

BIBLIOGRAFIE

1. Romulus Cristescu: Spații liniare ordonate. Ed. Acad, R.S.R. 1959.
2. Romulus Cristescu: Clase de spații liniare semiordonate pseudonormate. Studii și cercet. matem. 3—4 1956, 291—305.
3. Romulus Cristescu, Spații liniare ordonate topologice. Studii și cercet. matem. Tom 21 Nr. 5, p. 685—709, 1969.
4. S. Kakutani: Concrete Representation of Abstract M-Spaces Ann. of Math 42 994—1024.

Primit la redacție la 28.XI.1968.

ОТОБРАЖЕНИЕ НЕКОТОРЫХ РЕТИКУЛИРОВАННЫХ ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В настоящей работе отображается на пространство непрерывных функций один тип ретикулированных локально выпуклых пространств, введенных в (2). Терминология и обозначения заимствованы из (1).

REPRÉSENTATION DE CERTAINS ESPACES LINÉAIRES RÉTICULÉS LOCALEMENT CONVEXES

R É S U M É

Sur un espace de fonctions continues on représente, un type d'espaces linéaires réticulés localement convexes, introduits dans [2]. On établit le théorème suivant:

Soit X un espace linéaire complètement réticulé, avec M unité [3] et topologiquement complet. Il existe un espace de Hausdorff, localement compact, Ω tel que X soit isomorphe, comme espace réticulé localement convexe, avec $\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$.

ON SOME PROPERTIES OF NONHOMOGENOUS BIRTH, IMMIGRATION AND DEATH PROCESSES*

VRATISLAV HORÁLEK (BĚCHOVICE, CZECHOSLOVAKIA)

This paper is devoted to a study of some internal relations between general moments of the distribution of size population in the cases of nonhomogeneous birth-death process, birth process, death process, birth-immigration-death process and immigration-death process. For each of the investigated types of processes the necessary conditions are found.

1. Introduction

The paper deals with a study of some internal relations between general moments $\alpha_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, of the distribution of the integral-valued random variable $\xi(t)$ which assumes the values x of the population size at time t . We suppose that the change of size population is controlled by one of these nonhomogeneous processes: birth-death process, birth process, death process, birth-immigration-death process and immigration-death process.

The requirement to know some criterion having the form of necessary condition which must be fulfilled in order that the investigated process might be of a certain type arises in the analysis of experimental data representing simultaneous observations of the population size in given time t , the change of the size population in time being a function of birth, immigration and death rates: $\lambda(t)$, $\nu(t)$, $\mu(t)$ respectively.

2. Nonhomogeneous birth-death processes

Consider the birth-death process with states E_x ($x = 0, 1, \dots$) the birth and death rates $\lambda(t)$ and $\mu(t)$ being positive functions, continuous in the open interval $T = (0, \infty)$.

Assumptions:

a) if at time t the system is in state E_x , then the probability of the transition $E_x \rightarrow E_{x+1}$ in the interval $(t, t + \Delta t)$ is $x\lambda(t)\Delta t + o(\Delta t)$ for $x = 1, 2, \dots$;

* The paper was presented at the III Colognium on „Theory of probability“ in Braşov, 2–7 September 1968.

b) if at time t the system is in state E_x , then the probability of the transition $E_x \rightarrow E_{x-1}$ in the interval $(t, t + \Delta t)$ is $x\mu(t)\Delta t + 0(\Delta t)$ for $x = 1, 2, \dots$;

c) the probability of a transition to a state other than a neighbouring state is $0(\Delta t)$;

d) if at time t the system is in state E_x , then the probability of no change in the interval $(t, t + \Delta t)$ is

$$1 - x\{\lambda(t) + \mu(t)\}\Delta t + 0(\Delta t);$$

e) at time $t = 0$ the system is in state E_1 .

We find from the fundamental differential-difference equations which the functions

$$P_x(t) = P\{\xi(t) = x\}$$

must satisfy with initial conditions

$$P_1(0) = 1 \quad \text{and} \quad P_x(0) = 0, \quad x \neq 1, \quad (1)$$

that the probability generating function

$$v = \varphi(z, t) = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} P_x(t)z^x, \quad (2)$$

where we define $P_x(t) = 0$ for $x < 0$, satisfies the linear partial differential equation

$$\frac{\partial v}{\partial t} - (z - 1)[z\lambda(t) - \mu(t)] \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

where

$$v = z \text{ for } t = 0 \text{ and } v = 1 \text{ for } z = 1. \quad (4)$$

The integral surface $v = \varphi(z, t)$, which fulfils the conditions (4), is according to Kendall (1948)

$$v = 1 + \frac{z - 1}{e^{\rho(t)} - (z - 1) \int_0^t \lambda(\tau) e^{\rho(\tau)} d\tau}, \quad (5)$$

where

$$\rho(t) = \int_0^t [\mu(\tau) - \lambda(\tau)] d\tau. \quad (6)$$

From the well known relations between the generating function $\varphi(z, t)$ and the general moments $\alpha_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, there follow according to (5) the expressions

$$\alpha_1(t) = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=1} = e^{-\rho(t)}, \quad (7)$$

$$\alpha_2(t) = \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]_{z=1} = e^{-\rho(t)} \left[1 + 2e^{-\rho(t)} \int_0^t \lambda(\tau) e^{\rho(\tau)} d\tau \right] \quad (8)$$

and

$$\begin{aligned}\alpha_3(t) &= \left[\frac{\partial^3 \Phi}{\partial z^3} + 3 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right]_{z=1} \\ &= 6e^{-2\rho(t)} \int_0^t \lambda(\tau) e^{\rho(\tau)} d\tau \left\{ 1 + e^{-\rho(t)} \int_0^t \lambda(\tau) e^{\rho(\tau)} d\tau \right\} + e^{-\rho(t)}\end{aligned}\quad (9)$$

Hence follows: for positive functions $\lambda(t)$ and $\mu(t)$ continuous in T , the relation

$$\frac{\alpha_1(t)[\alpha_3(t) - \alpha_1(t)]}{\alpha_2^2(t) - \alpha_1^2(t)} = \frac{3}{2} \quad (10)$$

holds in process $\{\lambda(t), \mu(t)\}$ for every $t \in T$.

If the ratio

$$\frac{\mu(t)}{\lambda(t)} = c \quad (11)$$

is constant everywhere in T , then in the process $\{\lambda(t), \mu(t)\}$ the relations

$$\frac{\alpha_3(t) - 1}{\alpha_2^2(t) - 1} = \frac{3}{2} \quad \text{for } c = 1 \quad (12)$$

and

$$V^2[\xi(t)]\{1 - \alpha_1^{-1}(t)\}^{-1} = \frac{1+c}{1-c} = \text{const. for } c \neq 1 \quad (13)$$

hold for every $t \in T$, where $V[\xi(t)]$ denotes the coefficient of variation of the random variable $\xi(t)$.

The proof of (12) is evident, being $\alpha_1(t) = 1$ for every $t \in T$ for $C = 1$. In proving (13) we use the identity

$$e^{(c-1) \int_0^t \lambda(\tau) d\tau} - 1 = (c-1) \int_0^t \lambda(\tau) e^{(c-1) \int_0^s \lambda(s) ds} d\tau, \quad c \neq 1, \quad (14)$$

in relations (7) to (9).

3. Nonhomogeneous birth process

Consider the birth process with states $E_x (x = 1, 2, \dots)$, the birth rate $\lambda(t)$ being a positive function, continuous in the open interval $T = (0, \infty)$. The changes in the assumptions (see Chap. 2) and in the differential equation (3) are evident. The conditions (1) and (4) still hold.

In view of this preliminary note we obtain from (7) to (9) that

$$\alpha_1(t) = e\rho_b^{(t)}, \quad (15)$$

$$\alpha_2(t) = e\rho_b^{(t)}[2e\rho_b^{(t)} - 1] \quad (16)$$

and

$$\alpha_3(t) = 6e^{2\rho_b(t)} (e^{\rho_b(t)} - 1) + e^{\rho_b(t)}, \quad (17)$$

where

$$\rho_b(t) = \int_0^t \lambda(\tau) d\tau. \quad (18)$$

It is also seen that for positive function $\lambda(t)$, continuous in T , the relations

$$\frac{\alpha_1(t)}{\alpha_3(t)} [2\alpha_1(t) - 1] = 1 \quad (19)$$

and

$$\frac{\alpha_3(t) - \alpha_1(t)}{[\alpha_2(t) + \alpha_1(t)][\alpha_1(t) - 1]} = 3 \quad (20)$$

hold in process $\{\lambda(t)\}$ for every $t \in T$.

4. Nonhomogeneous death process

Consider the death process with states $E_x (x = 0, 1, 2, \dots)$ the death rate $\mu(t)$ being a positive function, continuous in the open interval $T = (0, \infty)$.

Assumptions:

- a) at time $t = 0$ the system is in state E_n , $n \geq 1$ is an integer;
- b) if at time t the system is in state E_x , then the probability of the transition $E_x \rightarrow E_{x-1}$ in the interval $(t, t + \Delta t)$ is $x\mu(t)\Delta t + o(\Delta t)$ for $x = 1, 2, \dots, n$;
- c) the probability of a transition to a lower state other than the neighbouring one is $o(\Delta t)$;
- d) of at time t the system is in state E_x , then the probability of no change in the interval $(t, t + \Delta t)$ is $1 - x\mu(t)\Delta t + o(\Delta t)$.

We shall first look for the appropriate generating function

$$v = \varphi(z, t) = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} P_x(t) z^x,$$

where

$$\begin{aligned} P_x(t) &= 0 & \text{for } x < 0 & \quad \text{and } x > n, \\ P_x(0) &= 0 & \text{for } x \neq n, \\ P_n(0) &= 1. \end{aligned} \quad (21)$$

The corresponding linear partial differential equation is of the form

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \mu(t) (z - 1) \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad (22)$$

where

$$v = z^n \quad \text{for } t = 0 \quad \text{and } v = 1 \quad \text{for } z = 1 \quad (23)$$

The integral surface $v = \varphi(z, t)$ fulfilling the conditions (23) is evidently equal to

$$v = [(z - 1)e^{-\int_0^t \mu(\tau) d\tau} + 1]^n. \quad (24)$$

Similarly as in Chap. 2 we get

$$\alpha_1(t) = ne^{-\rho_d(t)} \quad (25)$$

$$\alpha_2(t) = ne^{-\rho_d(t)} [(n - 1)e^{-\rho_d(t)} + 1] \quad (26)$$

and

$$\alpha_3(t) = [(n - 1)(n - 2)e^{-2\rho_d(t)} + 3(n - 1)e^{-\rho_d(t)} + 1] ne^{-\rho_d(t)}, \quad (27)$$

where

$$\rho_d(t) = \int_0^t \mu(\tau) d\tau.$$

Hence we obtain: for positive function $\mu(t)$, continuous in T , the relation

$$\frac{\alpha_1(t)}{\alpha_2(t)} \left[\alpha_1(t) - \frac{1}{n} \alpha_1(t) + 1 \right] = 1 \quad (28)$$

holds in process $\{\mu(t)\}$ for every $t \in T$. In addition to this equation it can be shown that simultaneously two inequalities

$$\frac{\alpha_1(t) [\alpha_1(t) + 1]}{\alpha_2(t)} > 1 \quad \text{and} \quad \frac{\alpha_3(t) - \alpha_1(t) [1 + \alpha_1^2(t)]}{\alpha_1^2(t)} < 3 \quad (29)$$

must hold. This form of inequalities will appear as very interesting where compared with the results in Chapters 5 and 6.

5. Nonhomogeneous birth-immigration-death processes

Consider now the birth-immigration-death process with states $E_x (x = 0, 1, 2, \dots)$ the birth rate $\lambda(t)$, death rate $\mu(t)$ and immigration rate $\nu(t)$ being positive functions, continuous in open interval $T = (0, \infty)$.

Assumptions:

- it at time t the system is in state E_x , then the probability of the transition $E_x \rightarrow E_{x-1}$ in the interval $(t, t + \Delta t)$ is $\{\nu(t) + x\lambda(t)\} \Delta t + o(\Delta t)$ for $x = 0, 1, 2, \dots$;
- if at time t the system is in the state E_x , then the probability of transition $E_x \rightarrow E_{x-1}$ in interval $(t, t + \Delta t)$ is $x\mu(t)\Delta t + o(\Delta t)$ for $x = 1, 2, \dots$;
- the probability of a transition to a state other than a neighbouring state is $o(\Delta t)$;

d) if at time t the system is in state E_x , then the probability of no change in the interval $(t, t + \Delta t)$ is

$$1 - \{v(t) + x[\lambda(t) + \mu(t)]\} \Delta t + O(\Delta t);$$

e) at time $t = 0$ the system is in state E_0 .

We find from the relevant fundamental differential-difference equations with the initial conditions

$$P_0(0) = 1 \quad \text{and} \quad P_x(0) = 0 \quad \text{for} \quad x = 1, 2, \dots, \quad (30)$$

that the probability generating function v satisfies the linear partial differential equation

$$\frac{\partial v}{\partial t} - (z - 1)[z\lambda(t) - \mu(t)] \frac{\partial v}{\partial z} = v(t)(z - 1)v, \quad (31)$$

where

$$v = 1 \quad \text{for} \quad t = 0 \quad \text{and} \quad v_1 = 1 \quad \text{for} \quad z = 1. \quad (32)$$

As it is known in a general case, it is impossible to obtain the integral surface $v = \varphi(z, t)$ fulfilling conditions (32)a as direct solution of differential equation (31). However, the generating function v can be found either with the aid of generating function (5) in the way introduced by Bartlett (1955), or direct as the probability generating function of the filtered nonhomogeneous Poisson's process (see Theorem 5A in Parzen's book (1964) in the form

$$v = \exp \left\{ \int_0^t \frac{(z - 1) v(\tau) d\tau}{e^{\rho(\tau, t)} - (z - 1) \int_\tau^t \lambda(s) e^{\rho(\tau, s)} ds} \right\}, \quad (33)$$

where

$$\rho(\tau_1 t) = \int_\tau^t [\mu(s) - \lambda(s) ds]. \quad (34)$$

Using now the same procedure as in Chapter 1 we get

$$\alpha_1(t) = \int_0^t v(\tau) e^{-2\rho(\tau, t)} d\tau \quad (35)$$

$$\alpha_2(t) = \alpha_1(t)[\alpha_1(t) + 1] + 2 \int_0^t v(\tau) e^{-2\rho(\tau, t)} \int_\tau^t \lambda(s) e^{\rho(\tau, s)} ds d\tau \quad (36)$$

and

$$\begin{aligned} \alpha_3(t) = & \alpha_1^3(t) + 6\alpha_1(t) \int_0^t v(\tau) e^{-2\rho(\tau, t)} \int_0^t \lambda(s) e^{\rho(\tau, s)} ds d\tau \\ & + 6 \int_0^t v(\tau) e^{-3\rho(\tau, t)} \left[\int_\tau^t \lambda(s) e^{\rho(\tau, s)} ds \right]^2 d\tau + \\ & + 3 \left[\alpha_1^2(t) + 2 \int_0^t v(\tau) e^{-2\rho(\tau, t)} \int_\tau^t \lambda(s) e^{\rho(\tau, s)} ds d\tau \right] + \alpha_1(t). \end{aligned} \quad (37)$$

From the last three expressions it may be concluded after some evident modifications that for positive functions $\lambda(t)$, $\nu(t)$ and $\mu(t)$, continuous in T , two inequalities

$$\frac{\alpha_1(t)[\alpha_1(t) + 1]}{\alpha_2(t)} < 1 \quad \text{and} \quad \frac{\alpha_3(t) - \alpha_1(t)[1 + \alpha_1^2(t)]}{\alpha_1^2(t)} > 3 \quad (38)$$

must hold simultaneously in process $\{\lambda(t), \nu(t), \mu(t)\}$ for every $t \in T$.

It can be shown that the inequalities just introduced are valid also in the case, the ratios

$$\frac{\nu(t)}{\lambda(t)} = b \quad \text{and} \quad \frac{\mu(t)}{\lambda(t)} = c \quad (39)$$

are constant everywhere in T . Then the corresponding generating function v can be obtained as a solution of the differential equation (31) modified with respect to (39) in the form (see Horálek (1964))

$$v = \left[1 - (z - 1) \int_0^t \lambda(\tau) d\tau \right]^{-b} \quad \text{for } c = 1, \quad (40)$$

$$= \left[\frac{(c - 1)e^{\rho_i(t)}}{z(1 - e^{\rho_i(t)}) - 1 + ce^{\rho_i(t)}} \right]^b \quad \text{for } c \neq 1, \quad (41)$$

where

$$\rho_i(t) = (c - 1) \int_0^t \lambda(\tau) d\tau \quad \text{for } c \neq 1. \quad (42)$$

Hence follow the first three general moments

$$\alpha_1(t) = \int_0^t \nu(\tau) d\tau \quad \text{for } c = 1, \quad (43)$$

$$= \frac{b(1 - e^{-\rho_i(t)})}{c - 1} \quad \text{for } c \neq 1, \quad (44)$$

$$\alpha_2(t) = \alpha_1(t) \left[1 + \alpha_1(t) + \frac{1}{b} \alpha_1(t) \right] \quad (45)$$

and

$$\alpha_3(t) = \alpha_1(t) \left[1 + 3 \left(1 + \frac{1}{b} \right) \alpha_1(t) + \left(1 + \frac{1}{b} \right) \left(1 + \frac{2}{b} \right) \alpha_1^2(t) \right]. \quad (46)$$

From here the validity of (38) is evident. We come to the same conclusions for other types of processes $\{(\lambda(t), \nu(t), \mu(t))\}$, in which only one ratio of two arbitrary rates is constant everywhere in I , and the third rate is independent of the first two.

6. Nonhomogeneous immigration-death processes

Consider the immigration-death process with states $E_x (x = 0, 1, 2, \dots)$, the immigration and death rates $\nu(t)$ and $\mu(t)$ being positive functions, continuous in the open interval $T = (0, \infty)$. The changes in the assumptions (see Chap.5) and in the differential equation (31) are evident and follow after application of identity $\lambda(t) \equiv 0$ in them. We can therefore obtain in the same way the final expressions of the moments $\alpha_i(t)$, $i = 1, 2, 3$; $t \in T$, from (35) to (37) in the form

$$\alpha_1(t) = \int_0^t \nu(\tau) e^{-\int_\tau^t \mu(s) ds} d\tau, \quad (74)$$

$$\alpha_2(t) = \alpha_1(t)[\alpha_1(t) + 1], \quad (48)$$

$$\alpha_3(t) = [\alpha_1^2(t) + 3\alpha_1(t) + 1]\alpha_1(t). \quad (49)$$

Now it is clear that for positive functions $\nu(t)$ and $\mu(t)$ continuous in T , two relations

$$\frac{[\alpha_1(t) + 1]\alpha_1(t)}{\alpha_2(t)} = 1 \quad \text{and} \quad \frac{\alpha_3(t) - \alpha_1(t)[1 + \alpha_1^2(t)]}{\alpha_1^2(t)} = 3 \quad (50)$$

hold simultaneously in process $\nu(t)$, $\mu(t)$ for every $t \in T$. In addition it is evident from (47) and (48) that

$$D^2[\xi(t)] = E[\xi(t)] \quad (51)$$

for every $t \in T$, where $E[\xi(t)]$ denotes the expected value and $D^2[\xi(t)]$ the variance of the random variable $\xi(t)$.

In the quoted paper (Horalek (1964)) the generating functions were derived for other types of immigration-death processes especially for the case when

$$\frac{\nu(t)}{\mu(t)} = \int_0^t \nu(\tau) d\tau \quad \text{everywhere in } T$$

and for the case when

$$\frac{\mu(t)}{\nu(t)} = a = \text{const.} \quad \text{everywhere in } T.$$

It can easily be shown that in these cases, too, the three qualities given in (50) and (51) remain valid.

REFERENCES

- Bartlett M. S. (1955), *An introduction to stochastic processes with special reference to methods and applications*. Cambridge University Press
- Horalek V. (1964), *On some types of nonhomogeneous birth-immigration-death processes*. Aplikace matematiky (Czech. Acad. Sci.), 9, 421-434s
- Kendall D. G. (1948), *On the generalized birth and death proces*. Ann. Math. Statist., 19, 1-15
- Parzen J. E. (1964): *Stochastic Processes*. Holden-Day, San Francisco, 2nd dition.

Received at 10.I.1969.

PRODUS SEMIINTERIOR SLĂBIT

ARISTIDE LEONTE

Fie X un spațiu vectorial complex (real). Vom spune că s-a dat un produs semiinterior slăbit pe X , dacă s-a definit o funcție $\langle \cdot, \cdot \rangle$ complexă (reală) pe $X \times X$ cu proprietățile

$$\text{PSIS1} - \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle - ,$$

$$\text{PSIS2} - \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle - ,$$

$$\text{PSIS3} - \langle x, x \rangle \geq 0 - ,$$

$$\text{PSIS4} - |\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle - ,$$

oricare ar fi $x, y, z \in X, \lambda \in \Gamma^1$.

Din proprietatea PSIS2 rezultă $\langle 0, y \rangle = 0$, oricare ar fi $y \in X$, deci PSIS3 este, întrucâtva, redondantă.

Dacă proprietatea PSIS3 ar avea forma întărită

$$\text{PSIS3}' - \langle x, x \rangle > 0 \text{ pentru } x \neq 0 - ,$$

funcția $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ar fi un produs semiinterior (1).

Propoziția 1. Pe orice spațiu seminormat se poate introduce un produs semiinterior slăbit (dar nu în mod unic).

Demonstrație. Fie s o seminormă pe spațiul liniar complex (real) X . Se știe că, oricare ar fi $y \in X$, există o funcțională liniară f_y definită pe X , așa încît $f_y(y) = s(y)$ și $|f_y(x)| \leq s(x)$, pentru orice $x \in X$. Pentru $y \in X$ funcția $s_y(x) = s(y)s(x)$ este, de asemenea, o seminormă pe X . Există, deci, o funcțională liniară f_y (păstrînd notația) definită pe X , așa încît $f_y(y) = s^2(y)$ și $f_y(x) \leq s(y) \cdot s(x)$. Funcția complexă (reală) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definită pe $X \times X$ după legea $\langle x, y \rangle = f_y(x)$, unde f_y este una din funcționalele liniare de mai înainte, are proprietățile unui produs semiinterior slăbit. Vom observa numai că $|\langle x, y \rangle|^2 = |f_y^2(x)| \leq s^2(y) \cdot s^2(x) = \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$.

Propoziția 2. Orice spațiu cu produs semiinterior slăbit este un spațiu seminormat.

Demonstrație. În adevăr, fie $s(x) = \langle x, x \rangle^{1/2}$. Funcția s are proprietățile

$$\text{SN1} - s(\lambda x) = |\lambda| s(x) - ,$$

$$\text{SN2} - s(x + y) \leq s(x) + s(y) - .$$

¹ desemnează corpul numerelor complexe (reale)

Pentru $\lambda = 0$ ambii membrii ai primei egalități sînt nuli. În cazul complementar, $\lambda \neq 0$, avem $s^2(\lambda x) = \langle \lambda x, \lambda x \rangle = |\lambda \langle x, x \rangle| = |\lambda| |\langle x, x \rangle| \leq |\lambda| |s(x) \cdot s(\lambda x)|$ (potrivit proprietății PSIS4) și $s^2(x) = s^2\left(\frac{1}{\lambda} \lambda x\right) \leq \frac{1}{|\lambda|} s(\lambda x) \cdot s(x)$, adică $|\lambda| s^2(x) \leq s(x) \cdot s(\lambda x)$. Rezultă, intermediar, că $s(x) = 0$ atunci, și numai atunci, cînd $s(\lambda x) = 0$. Într-un asemenea caz proprietatea SN1 este adevărată, de asemenea. Dacă $s(x) \neq 0$ (deci $s(\lambda x) \neq 0$), atunci obținem $s(\lambda x) \leq |\lambda| s(x)$ și $|\lambda| s(x) \leq s(\lambda x)$; posibilitățile sînt epuizate.

Să trecem la cea de a doua proprietate. Dacă $s(x + y) = 0$, inegalitatea este adevărată. În caz contrar, ea rezultă din $s^2(x + y) = \langle x + y, x + y \rangle = |\langle x, x + y \rangle + \langle y, x + y \rangle| \leq s(x) \cdot s(x + y) + s(y) \cdot s(x + y) = s(x + y) [s(x) + s(y)]$ prin simplificare.

Astfel pe orice spațiu liniar topologic local convex se poate defini o familie de produse semiinterioare slăbite și, reciproc, fiind dată o familie de produse semiinterioare slăbite pe un spațiu liniar, se poate defini pe acest spațiu o topologie cu vecinătăți convexe.

Fie τ topologia spațiului local convex X , $(s_\alpha)_{\alpha \in I}$ familia de seminorme care definește această topologie și $(\langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha)_{\alpha \in I}$ o familie de produse semiinterioare slăbite asociată (prin propoziția 1) familiei de seminorme. După Propoziția 2 funcțiile $s'_\alpha(x) = \langle x, x \rangle_\alpha^{1/2}$ sînt seminorme pe X . Dar $\langle x, x \rangle_\alpha^{1/2} = (f'_\alpha(x))^{1/2} = s_\alpha(x)$, unde am notat prin f'_α una (dar aleasă pentru totdeauna) din funcționalele liniare pe X asociată punctului x și seminorme s_α . Topologia τ' definită de $(s'_\alpha)_{\alpha \in I}$ coincide cu τ .

Definiție. Două familii $(\langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha)_{\alpha \in I}$, $(\langle \cdot, \cdot \rangle_\beta)_{\beta \in J}$ de produse semiinterioare slăbite pe un spațiu liniar X sînt echivalente dacă familiile de seminorme corespunzătoare (prin Propoziția 2) sînt echivalente.

Concluzia de mai înainte poate fi exprimată în felul următor:

Oricare două familii de produse semiinterioare slăbite asociate (prin Propoziția 1) unui spațiu liniar topologic local convex sînt echivalente.

Definiție. Familia $(\langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha)_{\alpha \in I}$ de produse semiinterioare slăbite pe spațiul liniar X este suficientă, dacă, pentru orice $x \neq 0$, există $\alpha \in I$ așa încît $\langle x, x \rangle_\alpha > 0$.

Evident, dacă familia $(\langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha)_{\alpha \in I}$ este suficientă, atunci familia $(s_\alpha)_{\alpha \in I}$ de seminorme corespunzătoare (prin Propoziția 2) este suficientă.

Reciproc, dacă $(s_\alpha)_{\alpha \in I}$ este o familie suficientă de seminorme pe spațiul liniar X , atunci există o familie suficientă de produse semiinterioare slăbite pe X . În adevăr, fie $x \neq 0$ și $\alpha \in I$ așa încît $s_\alpha(x) > 0$. În acest caz funcționala f'_α utilizată în Propoziția 1 este nenulă în x , deci produsul semiinterior slăbit corespunzător are aceeași proprietate.

În concluzie, considerînd un spațiu liniar topologic local convex, sîntem îndreptățiți să avem în vedere, o dată cu o familie de seminorme, o familie de produse semiinterioare slăbite pe acest spațiu. Dacă spațiul este separat, atunci respectiva familie este suficientă. În cele ce urmează X va fi un spațiu liniar topologic local convex separat.

Familia $(T_t)_{t \geq 0}$ de operatori liniari continui pe spațiul X se numește semigrup egal continuu de clasă (c_0) , dacă $T_t T_s = T_{t+s}$, $T_0 = I$, $\lim_{t \rightarrow t_0} T_t x = T_{t_0} x$,

oricare ar fi $x \in X$, pentru orice $t \geq 0$, pentru fiecare seminormă continuă, s_α , există o seminormă continuă s_β așa încît $s_\alpha(T_t x) \leq s_\beta(x)$, oricare ar fi $x \in X$, $t \geq 0$. (3).

În particular, dacă, oricare ar fi seminorma continuă s_α , $s_\alpha(T_t x) \leq s_\alpha(x)$ pentru orice $x \in X$ și $t \geq 0$, condiția a treia este îndeplinită. În acest caz vom spune că semigrupul este coercitiv de clasă (C_0) .

Dacă X este secvențial complet, atunci egalitatea $Ax = \lim_{t \downarrow 0} t^{-1}(T_t - I)x$ definește operatorul diferențial infinitezimal al semigrupului.

Definiție. Un operator liniar A cu domeniul și codomeniul $(D(A))$, respectiv $R(A)$ în spațiul topologic local convex X cu topologia dată de o familie $(\langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha)_{\alpha \in I}$ de produse semiinterioare slăbite se numește disipativ, dacă, oricare ar fi $\alpha \in I$, $Re \langle Ax, x \rangle_\alpha \leq 0$, pentru orice $x \in D(A)$.

Teorema 1. Dacă $(T_t)_{t \geq 0}$ este un semigrup coercitiv de clasă (C_0) peste spațiul local convex secvențial complet X , atunci operatorul diferențial infinitezimal A al semigrupului este disipativ.

Demonstrație. Să observăm că $Re \langle T_t x - x, x \rangle_\alpha = Re \langle T_t x, x \rangle_\alpha - \langle x, x \rangle_\alpha \leq \langle T_t x, x \rangle_\alpha - \langle x, x \rangle_\alpha \leq s_\alpha(T_t x) \cdot s_\alpha(x) - s_\alpha^2(x) \leq 0$ pentru orice $\alpha \in I$. Atunci $Re \langle Ax, x \rangle_\alpha = Re \langle \lim_{t \downarrow 0} t^{-1}(T_t x - x), x \rangle_\alpha = \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} Re \langle T_t x - x, x \rangle_\alpha \leq 0$ (oricare ar fi $\alpha \in I$).

Observație. Dacă șirul generalizat $(x_t)_{t \geq 0} \subseteq X$ are limita x , atunci, oricare ar fi $y \in X$, șirul $\langle x_t, y \rangle_\alpha$ converge către $\langle x, y \rangle_\alpha$, oricare ar fi $\alpha \in I$, deoarece $|\langle x_t, y \rangle_\alpha - \langle x, y \rangle_\alpha| \leq s_\alpha(x_t - x) \cdot s_\alpha(y)$.

Se știe că operatorul infinitezimal A al semigrupului egal continuu de clasă (C_0) peste X are domeniul $D(A)$ dens în X și codomeniul operatorului $I - A$ coincide cu X :

Sînt suficiente aceste condiții pentru ca un operator disipativ să fie generatorul infinitezimal al unui semigrup coercitiv de clasă (C_0) ?

Fie X, Y două spații liniare cu topologiile date de familiile suficiente de seminorme $(s_\alpha)_{\alpha \in I}$, respectiv $(s_\beta)_{\beta \in Y}$ și T un operator liniar de la X la Y cu domeniul $D(T) \subseteq X$. Dacă, oricare ar fi $\alpha \in I$, există $\beta(\alpha) \in Y$ și $c(\alpha) > 0$ astfel încît

$$s_{\beta(\alpha)}(Tx) \geq c(\alpha) s_\alpha(x),$$

oricare ar fi $x \in D(T)$, atunci T este inversabil și inversul lui T^{-1} , cu domeniul $D(T^{-1}) = R(T)$, este continuu. Și reciproc.

În particular, pentru $Y = X$, dacă pentru orice $\alpha \in I$ există inegalitatea $s_\alpha(Tx) \geq c(\alpha)s_\alpha(x)$, oricare ar fi $x \in D(T)$, operatorul T are invers continuu. Cu atît mai mult, dacă $c(\alpha)$ este constantă.

Fie A un operator disipativ în X . Oricare ar fi $\alpha \in I$ și $\lambda > 0$ există inegalitatea $\lambda s_\alpha(x) \leq s_\alpha(\lambda x - Ax)$, pentru $x \in D(A)$. În adevăr, $\lambda s_\alpha^2(x) = \lambda \langle x, x \rangle_\alpha \leq Re \langle \lambda \langle x, x \rangle_\alpha - \langle Ax, x \rangle_\alpha \rangle = Re \langle \lambda x - Ax, x \rangle_\alpha \leq |\langle \lambda x - Ax, x \rangle_\alpha| \leq s_\alpha(\lambda x - Ax) \cdot s_\alpha(x)$. Este adevărată, deci,

Propoziția 3. Dacă X este un spațiu liniar topologic local convex separat și A un operator disipativ în X , atunci, pentru orice $\lambda > 0$, operatorul $\lambda I - A$ este inversabil și inversul lui este continuu. Dacă $(s_\alpha)_{\alpha \in I}$ este familia suficientă

de seminorme care definește topologia spațiului, atunci $s_\alpha((\lambda I - A)^{-1}x) \leq \leq \lambda^{-1} s_\alpha(x)$ oricare ar fi $x \in D((\lambda I - A)^{-1})$ și $\alpha \in I$.

Teorema 1'. Dacă A este un operator disipativ în spațiul liniar topologic local convex secvențial complet X cu domeniul $D(A)$ dens în X și $R(I - A) = X$, atunci A generează un semigrup coercitiv de clasă (C_0) peste X .

Demonstrație. În baza propoziției precedente și potrivit ipotezei rezolventa $(I - A)^{-1} = R(1, A)$ există. Fie, pentru orice $x \in X$

$$B_n(\lambda)x = \sum_0^n (1 - \lambda)^h (R(1, A)^{h+1} x$$

Pentru $|1 - \lambda| < 1$, $\lambda > 0$ șirul $(B_n(\lambda)x)_{n \in N^*}$ este fundamental, după cum rezultă din următorul calcul: $s_\alpha(B_{n+p}(\lambda)x - B_n(\lambda)x) \leq \sum_{n+1}^{n+p} |1 - \lambda|^h s_\alpha(R(1, A)^{h+1} x)$

$\leq \sum_{n+1}^{n+p} |1 - \lambda|^h s_\alpha(x) \leq |1 - \lambda|^n s_\alpha(x)$, utilizînd al doilea rezultat din propoziția precedentă. Operatorii liniari și continui definiți de egalitatea $B(\lambda)x = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n(\lambda)x$ ($\lambda > 0$, $|1 - \lambda| < 1$) au expresiile

$$B(\lambda)x = \sum_0^\infty (1 - \lambda)^n (R(1, A)^{n+1} x$$

pentru orice $x \in X$. Dar $B(I)(\lambda y - A) = (\lambda - 1) B(\lambda) + B(\lambda)(I - A) = (\lambda I - A)B(\lambda) = I$. Prin urmare, $(\lambda I - A)^{-1}$, pentru $|\lambda - 1| < 1$, $\lambda > 0$ este definit pe X .

Mai mult, $s_\alpha((\lambda I - A)^{-1}x) \leq \lambda^{-1} s_\alpha(x)$, oricare ar fi $\alpha \in I$.

Repetînd raționamentul pentru $\mu > 0$, $|\lambda - \mu| < 1$ ($|1 - \lambda| < 1$), ajungem la concluzia că $(\mu I - A)^{-1}$ există și este continuu pe X , în plus $s_\alpha((\mu I - A)^{-1}x) \leq \mu^{-1} s_\alpha(x)$, pentru orice $\alpha \in I$. După un număr finit de asemenea pași oricărui $\mu > 0$ ajungem să-i dezvăluim aceste proprietăți.

În particular, rezolventa operatorului A există pentru orice $n \in N^*$. Mai mult, familia $((I - n^{-1}A)^{-m})_{n \in N^*}$ este formată din operatori egal continui. În adevăr, oricare ar fi $\alpha \in I$.

$$s_\alpha((I - n^{-1}A)^{-1}x) = s_\alpha(n(nI - A)^{-1}x) \leq s_\alpha(x),$$

$$s_\alpha((I - n^{-1}A)^{-m}x) \leq s_\alpha((I - n^{-1}A)^{-m+1}x) \leq \dots \leq s_\alpha(x)$$

Atunci A este operatorul diferențial infinitesimal al semigrupului egal continuu de clasă (C_0) dat de egalitatea

$$T_t x = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(tA(I - n^{-1}A)^{-1}x)$$

((3) cap. IX, §7). Dar $tA(I - n^{-1}A)^{-1} = nt((I - n^{-1}A)^{-1} - I)$, deci $T_t x = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(-nt) \cdot \exp(n + (y - n^{-1}A)^{-1}x)$. Observînd că $s_\alpha\left(\sum_0^n \frac{1}{h!} (nt(I -$

$-n^{-1}A)^h x) \leq \sum_0^n \frac{(nt)^h}{h!} s((I - n^{-1}A)^{-h} x) \leq \sum_0^n \frac{(nt)^h}{h!} s_\alpha(x) \leq \exp(nt) \cdot s_\alpha(x),$
 obținem $s_\alpha(\exp(nt)(y - n^{-1}A)^{-1}x) \leq \exp(nt) \cdot s(x)$. Atunci $s_\alpha(T_t x) \leq \exp(-nt) \cdot \exp(nt) \cdot s_\alpha(x) = s_\alpha(x)$, oricare ar fi $\alpha \in I$ și $x \in X$, deci semigrupul este coercitiv.

BIBLIOGRAFIE

1. Lumer G.: „Semi-inner product spaces“, Trans. Amer. Math. Soc., 100, 1961, 29–43.
2. Philips R. S., Lumer C.: „Dissipative operators in Banach space“ Pacific J. Math., 11, 1961, 679–698.
3. Yosida K.: „Functional Analysis“, Springer-Verlag, 1965.

Primit la redacție la 13.XII.1968.

ПОЛУВНУТРЕННЕЕ ОСЛАБЛЕННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Г. Люмер показал, что в любом нормированном пространстве можно ввести полувнутреннее произведение, которое порождает начальную норму и что любое линейное пространство с полувнутренним произведением может быть нормировано (1). Беря за определение диссипативного оператора в нормированном пространстве формально тождественное определение диссипативного оператора в гильбертовом пространстве, доказывается следующая теорема:

Линейный оператор A с плотной областью определения в пространстве Банаха X порождает вынужденную полугруппу класса (C_0) тогда, и только тогда, когда он является диссипативным и область оператора $I - A$ совпадает с $X(2)$.

Полувнутреннее ослабленное произведение порождает полунорму, что позволяет определение некоторой топологии локально выпуклого пространства с помощью подходящего семейства полувнутренних ослабленных произведений. Также может быть обобщен результат, упомянутый выше.

WEAKENED SEMI-INNER PRODUCT

ABSTRACT

G. Lumer proved that in every normed space may be introduce a semi-inner product, which generate the initial norm and that any linear space with semi-inner product is susceptible for normalisation. Adopting for the notion of dissipative operator in a normed space the formal-identical definition of dissipative operator in prehilbertian space is possible to prove the following theorem:

A linear operator A with the domain dense in a Banach space X generate a contraction semi-group of class (C_0) if and only if it is dissipative and the range of $I - A$ is X .

A weakened semi-inner product generate a semi-norm and this fact allow to define the topology of a local convex space using an adequate family of weakened semi-inner products. In this context it is possible to generalize the result mentioned above.

ITERATELE DE UN ORDIN OARECARE ALE SISTEMELOR DIFERENȚIALE LINIARE ȘI DE ORDINUL I

V. OLARIU

Într-un articol anterior [1] s-au definit iteratele de un ordin oarecare λ (λ fiind un număr complex oarecare) ale unor ecuații diferențiale liniare și de ordinul I, precum și soluțiile lor elementare; metoda expusă cu acest prilej are dezavantajul că nu este aplicabilă decât operatorilor diferențiali de ordinul I. De aceea, pentru a defini noțiuni corespunzătoare celor din [1] și pentru operatori diferențiali de un ordin oarecare $n > 1$ va trebui schimbată metoda utilizată; ne putem însă dispensa de utilizarea unor noțiuni și mărimi noi dacă se folosește faptul binecunoscut că orice ecuație de ordinul I poate fi considerată ca una din componentele unui sistem diferențial de ordinul I, format din n ecuații; mai precis, orice soluție a unei ecuații diferențiale de ordinul n este în același timp și o soluție a unui sistem diferențial convenabil, ales, format din n ecuații de ordinul I. În acest mod, se pot extinde rezultatele demonstrate în [1] la orice ecuație diferențială liniară.

Fie deci sistemul diferențial liniar și de ordinul I scris sub formă matricială:

$$(1) \quad \frac{dY}{dx} = A(x)Y.$$

în care $Y = Y(x)$ este un vector, adică o matrice coloană având n linii, cu componentele $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ care constituie funcțiile necunoscute ale sistemului (1) iar $A(x)$ este o matrice pătrată de ordinul n având elementele $a_{jk}(x)$ funcții indefinit derivabile pentru orice x real; atît coeficienții sistemului cît și funcțiile necunoscute pot avea atît valori reale cît și valori complexe; pentru ușurința scrierii, vom presupune că aceste valori sînt reale.

După cum este bine cunoscut din teoria generală a sistemelor diferențiale, sistemul (1) admite o matrice integrală $E(x) = E(x, x_0)$, deasemenea indefinit derivabilă pentru orice x , astfel încît $E(x_0, x_0) = I$, I fiind matricea unitate; în plus, această matrice va verifica ecuația matricială

$$(2) \quad \frac{dE}{dx} = A(x)E,$$

dedusă din (1). Vom nota prin $A(x)$ și $E^*(x)$ matricile transpuse corespunzătoare matricilor $A(x)$, respectiv $E(x)$; din (2) se va deduce cu ușurință că este verificată și ecuația matricială de mai jos:

$$(3) \quad \frac{dE^*}{dx} = E^* A^*(x).$$

Vom presupune cunoscute elementele de bază ale teoriei distribuțiilor așa cum este expusă în [2] și [3]; vom face acum unele precizări privind modul în care vom utiliza această teorie în cazul vectorial. Vom considera spațiul funcțiilor indefinit derivabile cu suport compact pe axa reală, pe care îl vom nota prin $C_0^\infty(R_1)$ înzestrat cu topologia lui Schwartz iar mulțimea distribuțiilor (adică mulțimea funcționalelor liniare și continui pe $C_0^\infty(R_1)$ corespunzătoare) o vom nota prin $\mathcal{D}'$. În viitor, $\varphi(x)$ va reprezenta un vector ale cărui linii sînt formate din funcții din $C_0^\infty(R_1)$ iar distribuția vectorială f (avînd deasemenea n linii) va fi formată cu ajutorul a n distribuții din $\mathcal{D}$; prin definiție, funcționala $\langle f, \varphi \rangle$ va fi deci o funcțională vectorială cu n linii, în linia j aflîndu-se funcționala $\langle f_j, \varphi_j \rangle$; dacă A este o matrice multiplicator în spațiul distribuțiilor vectoriale astfel definite, adică dacă A este o matrice pătrată ale cărei elemente sînt funcții indefinit derivabile pe axa reală, vom pune:

$$(3') \quad \langle Af, \varphi \rangle = \langle f, A^* \varphi \rangle,$$

unde matricea A^* a fost definită anterior. Prin $\delta(x - x_0)$ vom înțelege distribuția-vector care are toate componentele egale cu distribuția lui Dirac $\delta(x - x_0)$ și de aceea va fi valabilă egalitatea $\langle \delta(x - x_0), \varphi(x) \rangle = \varphi(x_0)$.

În considerațiile care vor urma utiliza operatorul L generat de către ecuația matricială (1); cu alte cuvinte, vom nota

$$(4) \quad LY = \left[\frac{d}{dx} - A(x) \right] Y.$$

Este ușor de constatat că dacă matricea $A(x)$ este de clasă C^k , $k = 1, 2, \dots$ atunci au sens iteratele pînă la ordinul k ale operatorului L ; aceste iterate se vor defini în mod obișnuit, punîndu-se $L^1 = L$, $L^j = L(L^{j-1})$, $j = 2, \dots, k$; astfel, vom avea

$$L^2 Y = \frac{d^2 Y}{dx^2} - \frac{d}{dx} (AY) - A \frac{dY}{dx} + A^2 Y = \left(\frac{d^2}{dx^2} - 2A \frac{d}{dx} + A^2 - \frac{dA}{dx} \right) Y,$$

$$L^3 Y = \left[\frac{d^3}{dx^3} - 3A \frac{d^2}{dx^2} + \left(3A^2 - 2 \frac{dA}{dx} \right) \frac{d}{dx} + \left(-\frac{d^2 A}{dx^2} - A^3 + 3A \frac{dA}{dx} \right) \right] Y, \text{ etc.}$$

Evident, dacă matricea $A(x)$ este indefinit derivabilă, numărul natural k este arbitrar; pentru simetrie, vom nota $L^0 Y = Y$.

Vom considera acum o distribuție matricială care va juca un rol deosebit în toate considerațiile viitoare și anume, vom nota prin $F_\lambda(x, x_0)$, unde λ este un număr complex oarecare, distribuția:

$$(5) \quad F_\lambda(x, x_0) = \frac{(x - x_0)_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} \cdot E(x, x_0)$$

în care matricea $E(x, x_0)$ este matricea definită anterior, $Y(\lambda)$ este funcția euleriană de speța II iar funcția $(x - x_0)_+^{\lambda-1}$ este funcția identic nulă dacă $x \leq x_0$ și coincide cu funcția $(x - x_0)^{\lambda-1}$ dacă $x > x_0$.

Din definiție rezultă că distribuția (5) are suportul concentrat pe semi-axa pozitivă a axei reale și reprezintă o distribuție regulată (adică coincide cu o funcție local integrabilă) pentru $\operatorname{Re} \lambda > 0$. Vom demonstra teorema următoare:

1. *Teoremă.* Distribuția $F_\lambda(x, x_0)$ definită prin relația (5) este o distribuție olomorfă pentru orice λ complex; dacă $\lambda = -k$, $k = 0, 1, 2, \dots$ atunci suportul acestei distribuții este concentrat în $x = x_0$ și sînt valabile relațiile:

$$(6) \quad F_{-k}(x, x_0) = L^k \delta(x - x_0), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

L^k fiind iterata de ordin k a operatorului L definit prin (4).

Demonstrație. Vom presupune mai întîi că $\operatorname{Re} \lambda > 0$ ceea ce face ca distribuția (6) să fie regulată; scriind funcționala corespunzătoare vom avea:

$$\langle F_\lambda(x, x_0), \varphi(x) \rangle = \langle \Phi_\lambda(x - x_0), E^*(x, x_0) \varphi(x) \rangle = \langle \Phi_\lambda(x - x_0), \psi(x, x_0) \rangle$$

unde s-au folosit notațiile:

$$(7) \quad \Phi_\lambda(x - x_0) = \frac{(x - x_0)_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}, \quad \psi(x, x_0) = E^*(x, x_0) \varphi(x),$$

și deoarece ψ este deasemenea un vector care are componentele funcției din $C_0^\infty(R_1)$ după cum se constată foarte ușor, din egalitatea

$$(8) \quad \langle F_\lambda(x, x_0), \varphi(x) \rangle = \langle \Phi_\lambda(x - x_0), \psi(x, x_0) \rangle$$

rezultă că proprietățile distribuției (5) se vor deduce din proprietățile distribuției $\Phi_\lambda(x, x_0)$; ori se știe [3] că distribuția $\Phi_\lambda(x - x_0)$ este o distribuție olomorfă pentru orice λ complex iar pentru $\lambda = -k$, $k = 0, 1, 2, \dots$ suportul ei este concentrat în punctul $x = x_0$ fiind valabile totodată egalitățile:

$$(9) \quad \Phi_{-k}(x - x_0) = \delta^k(x - x_0), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Folosind egalitatea (8) și rezultatul anterior rezultă olomorfia distribuției $F_\lambda(x, x_0)$ pentru orice λ complex precum și egalitățile:

$$(10) \quad \langle F_{-k}(x, x_0), \varphi \rangle = (-1)^k \psi^{(k)}(x_0), \quad \psi^{(k)} = \frac{d^k \psi}{dx^k},$$

notînd pentru ușurință $\psi(x_0, x_0) = \psi(x_0)$; pentru a calcula efectiv valoarea lui F_{-k} va trebui să arătăm că între $\psi(x_0)$ și $\varphi(x_0)$ există relațiile:

$$(11) \quad \left. \frac{d^k \psi}{dx} \right|_{x=x_0} = (-1)^k \langle L^k \delta(x - x_0), \varphi(x) \rangle \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Vom demonstra egalitățile (11) prin inducție; pentru $k = 1$, din a doua relație (7) rezultă prin derivare:

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{dE^*}{dx} \cdot \varphi + E^* \frac{d\varphi}{dx} = E^* A^* \varphi + E^* \frac{d\varphi}{dx},$$

dacă ținem cont de ecuația (3); ori deoarece avem deasemeni $E^*(x_0, x_0) = I$, din egalitatea anterioară va rezulta cu ușurință egalitatea

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\varphi}{dx} \right|_{x=x_0} &= A^*(x_0) \varphi(x_0) + \left. \frac{d\varphi}{dx} \right|_{x=x_0} = \langle \delta(x - x_0), A^*(x) \varphi(x) + \frac{d\varphi}{dx} \rangle = \\ &= \langle \left[A(x) - \frac{d}{dx} \right] \delta(x - x_0), \varphi(x) \rangle = - \langle L \delta(x - x_0), \varphi(x) \rangle; \end{aligned}$$

astfel egalitatea (11) este valabilă pentru $k = 1$; să presupunem acum că (11) este valabil pentru $k = j$, ceea ce face să putem scrie egalitățile:

$$\begin{aligned} \frac{d^{j+1} \psi}{dx^{j+1}} &= \frac{d^j}{dx^j} \left(\frac{d\varphi}{dx} \right) = \frac{d^j}{dx^j} \left(E^* A^* \varphi + E^* \frac{d\varphi}{dx} \right) = \frac{d^j}{dx^j} (E^* \varphi_1) + \frac{d^j}{dx^j} \left(E^* \frac{d\varphi}{dx} \right) = \\ &= (-1)^j \left\langle \left(\frac{d}{dx} - A \right)^j \delta(x - x_0), \varphi_1(x) \right\rangle + \\ &+ (-1)^j \left\langle \left(\frac{d}{dx} - A \right)^j \delta(x - x_0), \frac{d\varphi(x)}{dx} \right\rangle, \end{aligned}$$

dacă se aplică de două ori egalitatea presupusă valabilă în care se face înții $\varphi = \varphi_1 = A^* \varphi$ și apoi se înlocuiește φ prin $\frac{d\varphi}{dx}$; rezultă imediat valabilitatea relației

$$\begin{aligned} \frac{d^{j+1} \psi}{dx^{j+1}} &= (-1)^j \left\langle \left(\frac{d}{dx} - A \right)^j \delta(x - x_0), A^* \varphi \right\rangle + \\ &+ (-1)^{j+1} \left\langle \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} - A \right)^j \varphi(x - x_0), \varphi \right\rangle \end{aligned}$$

din care rezultă ușor egalitatea

$$\left. \frac{d^{j+1} \psi}{dx^{j+1}} \right|_{x=x_0} = (-1)^{j+1} \left\langle \left(\frac{d}{dx} - A \right)^{j+1} \delta(x - x_0), \varphi(x) \right\rangle$$

care arată că egalitățile (11) sînt valabile pentru orice k .

Înlocuind acum relațiile (11) în relațiile (10) se obțin egalitățile

$$\langle F_{-k}(x, x_0), \varphi(x) \rangle = \langle L^k \delta(x - x_0), \varphi(x) \rangle, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

care coincid cu relațiile (6) și teorema este demonstrată.

Prin urmare, plecînd de la o soluție convenabil aleasă a sistemului diferențial (1) și utilizînd cîteva proprietăți elementare ale distribuțiilor se poate determina o anumită distribuție care conține un parametru complex și care pentru anumite valori ale acestui parametru se reduce la iteratele operatorului L definit de ecuația matricială (1); de aceea este natural să presupunem, așa cum s-a presupus și în lucrarea [1], precum și în alte lucrări (de exemplu [4]) că distribuția (5) definește pentru diverse valori ale parametrului complex λ iteratele de un ordin oarecare (număr complex) ale operatorului L ; justificarea acestei ipoteze se face imediat dacă ținem cont că pentru $\lambda = -1, -2, \dots, -k, \dots$ se obțin iteratele obișnuite. Se mai poate face observația că pentru a obține efectiv

operatori care generalizează operatorii de iterare obișnuiți trebuie să presupunem $\operatorname{Re} \lambda < 0$, deoarece pentru celelalte valori ale parametrului se obțin distribuții regulate. Vom constata imediat că între aceste distribuții regulate și iteratele de un ordin oarecare (complex) ale operatorului L există o strânsă legătură în anumite condiții suplimentare.

În cazul particular al coeficienților constanți (adică în cazul în care matricea A este constantă) matricea $E(x, x_0)$ are o formă foarte simplă fiind egală, după cum este bine cunoscut cu $e^{A(x-x_0)}$; în acest caz vom presupune $x_0 = 0$, așa că distribuția (5) corespunzătoare coeficienților constanți va fi dată prin relația

$$(5') \quad F_\lambda(\tau) = \frac{x_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} e^{Ax}.$$

Pentru a defini modul în care operatorii introduși mai sus se aplică asupra funcțiilor (mai precis asupra distribuțiilor) argument, vom utiliza operația de convoluție a distribuțiilor, care va fi notată cu $*$. Astfel, prin iterata de ordin complex λ a operatorului L definit prin relația (4) se va înțelege relația

$$(12) \quad L^{-\lambda} u(x) = F_\lambda(x, x_0) * u(x),$$

în care $u(x)$ este distribuția argument asupra căreia se aplică operatorul considerat; este evident că în general, pentru ca operația care apare în membrul drept al egalității (12) să aibe sens, va trebui să impunem condiții suplimentare distribuției $u(x)$. Astfel, de exemplu, este suficient să presupuem că $u(x)$ are suportul concentrat pe semi-axa pozitivă a axei Ox , în care, caz după cum este bine cunoscut, convoluția considerată are sens și determină o nouă distribuție din $\mathfrak{D}'$. Vom presupune deasemeni că în definiția (12) parametrul λ este astfel încît $\operatorname{Re} \lambda < 0$, pentru a obține, după cum am menționat mai sus, efectiv distribuții care să generalizeze operatorii diferențiali ordinari.

Justificarea definiției (12) se poate face imediat; pentru aceasta, este suficient să arătăm că pentru $\lambda = -k$, $k = 1, 2, \dots$ se obțin operatori diferențiali ordinari; ori dacă folosim teorema 1 (mai precis relația (6), din (12) rezultă cu ușurință, dacă utilizăm unele proprietăți elementare ale convoluției:

$$F_{-k}(x, x_0) * u(x) = L^k \delta(x - x_0) * u(x) = L^k [\delta(x - x_0) * u(x)] = L^k u(x - x_0)$$

și deci, dacă luăm $x_0 = 0$, obținem $L^k u(x) = F_k(x, 0) * u(x)$. În acest mod s-a obținut justificarea dorită.

Prin urmare, în concluzie la considerațiile expuse pînă acum, rezultă că dacă se consideră o soluție convenabilă a sistemului matricial (1) cu ajutorul unei distribuții strîns legată de această soluție se pot defini toate iteratele operatorului L determinat de ecuația considerată; aceste iterate definite pentru orice număr complex λ .

În continuare, vom considera cazul în care matricea A este constantă și vom deduce cîteva consecințe relative la sistemele liniare și cu coeficienți constanți. Aceste consecințe rezultă din teorema următoare:

2. *Teoremă.* Distribuția (5') este o soluție a ecuației funcționale matriciale

$$(13) \quad F_\lambda(x) * F_\mu(x) = F_{\lambda+\mu}(x).$$

Demonstrație. Vom presupune inițial $\operatorname{Re} \lambda > 0$ și $\operatorname{Re} \mu > 0$; după cum am văzut, în aceste condiții distribuția matricială (5') este regulată, ceea ce face ca operația de convoluție exprimată în membrul drept al lui (13) să se poată scrie sub formă, cu ajutorul unei integrale; vom avea:

$$F_{\lambda}(x) * F_{\mu}(x) = \frac{1}{\Gamma(\lambda) \Gamma(\mu)} \int_{-\infty}^{+\infty} F_{\lambda}(t) F_{\mu}(x-t) dt = \frac{e^{Ax}}{\Gamma(\lambda) \Gamma(\mu)} \int_0^x t^{\lambda-1} (x-t)^{\mu-1} dt = F_{\lambda+\mu}(x).$$

Pentru celelalte valori ale lui λ și μ (13) rămâne valabilă deoarece $F_{\lambda}(x)$ și $F_{\mu}(x)$ sînt funcții olomorfe de λ , respectiv μ și deci se poate efectua prelungirea analitică, în (13), pentru orice valoare a acestor parametrii; deoarece prelungirea analitică se face în mod unic, nu se poate obține o relație diferită de relația (13) pentru $\operatorname{Re} \lambda < 0$ și $\operatorname{Re} \mu < 0$. Teorema este demonstrată.

Cu ajutorul teoremei 2 se poate arăta imediat că soluția elementară a operatorului diferențial generalizat

$$(14) \quad L^{-\lambda} u(x) = f(x),$$

în care $f(x)$ este o matrice-coloană avînd elementele distribuției, este chiar distribuția $F_{\lambda}(x)$, dacă definim soluția elementară a operatorului $L^{-\lambda}$ ca fiind aceea distribuție care prin aplicarea operatorului considerat se transformă în matricea-coloană $\delta(x)$. În adevăr, în baza definițiilor date anterior și folosind relația (13) vom putea scrie egalitățile care urmează:

$$L^{-\lambda} F_{-\lambda}(x) = F_{-\lambda}(x) * F_{\lambda}(x) = F_{-\lambda+\lambda}(x) = F_0(x) = \delta(x).$$

Prin urmare, în cazul coeficienților constanți, distribuția (5) care se înlocuiește prin distribuția (5') are proprietatea că conține nu numai toate iteratele operatorului L ci și toate soluțiile elementare ale acestor operatori: dacă operatorii diferențiali (ordinari și generalizați) se obțin pentru acele valori ale parametrului λ pentru care $\operatorname{Re} \lambda < 0$, soluțiile elementare (fundamentale) corespunzătoare se obțin prin simplă schimbare de semn a acestui parametru. Conform cu teoria generală a soluției elementare, rezultă că o soluție a ecuației (14) va fi exprimată prin egalitatea

$$u(x) = F_{-\lambda}(x) f(x),$$

dacă convoluția are sens (pentru acest fiind suficient să presupunem că distribuția $f(x)$ are suportul concentrat pe semi-axa $x > 0$). În particular, dacă $\lambda = -k$, $k = 1, 2, \dots$ iar distribuția f este regulată, ultima egalitate conduce la expresia

$$u(x) = \frac{x_+^{k-1}}{\Gamma(k)} e^{Ax} * f(x) = \frac{e^{Ax}}{(k+1)!} \int_0^x (x-t)^{k-1} e^{At} dt$$

care coincide cu expresia cunoscută a soluției problemei Cauchy $u(0) = u'(0) = \dots = u^{(k-1)}(0) = 0$ pentru ecuația matricială $L^k u(x) = f(x)$.

O altă aplicație a ecuației funcționale (13) constă în posibilitatea descompunerii oricărui operator de forma (12) în factori de aceeași formă; astfel se poate scrie relația

$$L^{-\lambda} = L^{-\lambda_1} * L^{-\lambda_2} * \dots * L^{-\lambda_n}$$

dacă numerele complexe $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sînt astfel alese încît suma lor să fie egală cu λ .

BIBLIOGRAFIE

- [1]. V. Olariu: Asupra unor operatori diferențiali liniari generalizați, Analele Universității București, seria Științele Naturii, Matematică — Mecanică, an XVI, Nr.1, 1967
- [2]. L. Schwartz: Méthodes mathématiques pour les sciences physiques, Hermann Paris, 1961
- [3]. I. M. Gelfand, G. E. Șilov: — Funcții generalizate și operații cu ele vol.I, Moscova, 1958, (în lb. rusă)
- [4]. V. Olariu: Opérateurs paraboliques généralisés, Bull. Math. de la Soc. Math. de la R.S. de Roumanie, tome 9 (57), nr. 3

Primit la redacție la 25.XII.1968.

ИЧИРАЛЫ ЛЮБОГО ПОРЯДКА ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ I-ГО ПОРЯДКА

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Рассматриваются некоторые свойства распределения (5), связанные с оператором (4) и его итераты любого порядка λ (λ — комплексное число).

LES ITÉRÉES D'UN ORDRE QUELCONQUE DES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS LINÉAIRES ET D'ORDRE I

RÉSUMÉ

On traite de quelques propriétés de la distribution (5), liées à l'opérateur (4) et se sitérées d'un ordre arbitraire λ (λ — nombre complexe).

DIE BESTIMMUNG DER PROBEELEMENTENZAHLE UN DER ZUVERLÄSSIGKEITSGRENZEN AUS EINER MENGE LOGNORMALER VERTEILUNG *

S. PETHŐ (Miskolc)

Im Interesse der Bestimmung der einer Menge lognormaler Verteilung entnommenen Probeelementenzahl und der Zuverlässigkeitsgrenzen wir aus jenes Eigenschaft der lognormalen Verteilung aus, wonach die Logarithmen der Werte der Wahrscheinlichkeitsveränderlichen die normale Verteilungsfunktion befolgen.

So läßt sich für die der Menge lognormaler Verteilung entnommenen Probeelementenzahl die Beziehung.

$$n \geq \lambda^2 \frac{\sigma_{ln}^2}{(\bar{x}_{ln} - m_{ln})^2} \quad (1)$$

anschreiben. Die Indices ln in diesem Ausdruck weisen auf den Umstand hin, dass es sich um eine Menge lognormaler Verteilung handelt. Der Erwartungswert m_{ln} und die Streuung σ_{ln} lassen sich aus den Daten einer repräsentativen Aufnahme in der Weise schätzen dass man den natürlichen Logarithmus jenes einzelnen Wertes der Messreihe bildet, aus diesem für die veränderlichen Parameter m_{ln} und σ_{ln} entsprechende Werte erhält und die Bestimmung der Probeelementenzahl mit Gl (1) berechnet. Das Rechnen mit den natürlichen Logarithmen ist jedoch langwierig, aber auch nicht erforderlich, weil in Kenntnis des Erwartungswertes $M(\xi)$ der lognormalen Verteilung und deren quadratischen Abweichung $D^2(\xi)$ für die Probeelementenzahl ein weniger Rechenarbeit erfordernder Zusammenhang hergeleitet werden kann:

$$M(\xi) = e^{m + \frac{\sigma^2}{2}} \quad (2)$$

$$D^2(\xi) = e^{2m + \sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1). \quad (3)$$

Aus (2) erhält man

$$m_{ln} = \ln M(\xi) - \frac{\sigma^2}{2} \quad (4)$$

* Diese Arbeit ist bei dem III-ten Kolloquium über „Wahrscheinlichkeitstheorie“ in Braşov, 2–7 September 1968 vorgetragen worden.

und das in (3) eingeführt, wird

$$D^2(\xi) = e^{2\ln M(\xi)}(e^{\sigma^2} - 1) = M^2(\xi)[e^{\sigma^2} - 1], \quad (5)$$

$$e^{\sigma^2} = \frac{D^2(\xi)}{M^2(\xi)} + 1, \quad (6)$$

$$\sigma_{ln}^2 = \ln \left\{ \left[\frac{D(\xi)}{M(\xi)} \right]^2 + 1 \right\} = 2,3 \lg \left\{ \left[\frac{D(\xi)}{M(\xi)} \right]^2 + 1 \right\}. \quad (7)$$

Analog (4), wird

$$\bar{x}_{ln} = \ln \bar{x} - \frac{\sigma^2}{2}. \quad (8)$$

Nach Einführung von (4), (7) und (8) in (1), kann für die Probeelementenzahl geschrieben werden:

$$n \geq \frac{\lambda^2}{2,3} \cdot \frac{\ln \left\{ \left[\frac{D(\xi)}{M(\xi)} \right]^2 + 1 \right\}}{[\ln \bar{x} - \ln M(\xi)]^2} = \frac{\lambda^2}{2,3} \cdot \frac{\lg \left\{ \left[\frac{D(\xi)}{M(\xi)} \right]^2 + 1 \right\}}{\left[\lg \frac{\bar{x}}{M(\xi)} \right]^2}. \quad (9)$$

Wenn man den Wert $\bar{x}$ um den Erwartungswert in $M(\xi) + \varepsilon$ oder $M(\xi) - \varepsilon$ festsetzt, so erhält man, wie es aus der Eigenschaft der Logarithmusfunktion folgt, zwei Werte, n_1 und n_2 für die Probeelementenzahl:

$$n_{1,2} \geq \frac{\lambda^2}{2,3} \cdot \frac{\lg \left\{ \left[\frac{D(\xi)}{M(\xi)} \right]^2 + 1 \right\}}{\left[\lg \frac{M(\xi) \pm \varepsilon}{M(\xi)} \right]^2} = \frac{\lambda^2}{2,3} \cdot \frac{\lg \left\{ \left[\frac{D(\xi)}{M(\xi)} \right]^2 + 1 \right\}}{\left[\lg \left(1 \pm \frac{\varepsilon}{M(\xi)} \right) \right]^2}. \quad (10)$$

Das Zulässigkeitsintervall kann auch so gewählt werden dass man um den Erwartungswert eine gewisse prozentuale Abweichung — z.B. 1, 2, 5, 10, 15, 20 oder 25% —, also $\bar{x} = (1 + \varphi)M(\xi)$ zulässt, worin φ (also $\varphi < 1$) den Anteil der gewählten Abweichung bedeutet. Dann wird in dem Nenner der Formel für die Probeelementenzahl die Grösse des Erwartungswertes keine Rolle spielen (in (9) lässt sich mit $M(\xi)$ vereinfachen), und die zwei Werte der Probeelementenzahl sind:

$$n_{1,2} \geq \frac{\lambda^2}{2,3} \cdot \frac{\lg \left\{ \left[\frac{D(\xi)}{M(\xi)} \right]^2 + 1 \right\}}{[\lg(1 \pm \varphi)]^2}. \quad (11)$$

Für n_1 gilt das im Nenner stehende positive, für n_2 das negative Vorzeichen, Aus der Logarithmusfunktion folgt, dass $n_1 > n_2$ ist, man erhält also für die Probeelementenzahl dann einen grösseren Wert, wenn man die grössere Zuverlässigkeitsgrenze (also $1 + \varphi$) vorschreibt.

Wenn man nur die relative Streuung $\left(v = \frac{D(\xi)}{M(\xi)}\right)$ schätzen kann, so kann man für die zwei Werte der Probeelementenzahl in folgender Weise geschrieben werden:

$$n_{1,2} \geq \frac{\lambda^2}{2,3} \cdot \frac{\lg(1+v^2)}{[\lg(1 \pm \varphi)]^2}. \quad (12)$$

Zur Erleichterung der Rechnung aufgrund der Formeln (11) und (12) legen wir die Tabellen I. und II. bei, in welcher die berechneten Werte für $\lambda = 2$, also für den Fall gelten, wenn es sich um eine praktisch sichere Wahrscheinlichkeit von 95,4% handelt. In der Tabelle II. kann man die Probeelementenzahlen bei verschiedenen Werte von φ und v finden.

Nach den für die aus einer Menge lognormaler Verteilung entnommenen Probeelemente hergeleiteten Zusammenhänge ergeben sich zwei Zahlen abhängig davon, ob man in Nenner der Formeln das positive oder das negative Vorzeichen in betracht zieht. Deshalb ist es klar, dass die Zuverlässigkeitsgrenze — im Falle von n_1 Elementenzahlen $M(\xi) + \varepsilon$, bzw. $(1 + \varphi)M(\xi)$ also die grössere, im Falle von n_2 die kleinere ursprünglich angenommenen gleich ist und die andere Zuverlässigkeitsgrenze muss berechnet werden.

Wenn n_1 berechnet würde, so gilt die grössere Zuverlässigkeitsgrenze $M(\xi) + \varepsilon$, dann gibt es nach einfacher Überlegung aufgrund des Nenners der Formel (9):

$$\left[\lg \frac{\bar{x}}{M(\xi)}\right]^2 = \left[\lg \frac{M(\xi) + \varepsilon}{M(\xi)}\right]^2 = \left[\lg \frac{M(\xi)}{M(\xi) + \varepsilon}\right]^2 = \left[\lg \frac{M^2(\xi)}{M(\xi)[M(\xi) + \varepsilon]}\right]^2.$$

Also für die kleinere Zuverlässigkeitsgrenze gilt im Falle von Probeelementenzahl n_1 aufgrund des ersten, zweiten bzw. letzten Gliedes diesen Zusammenhang:

$$I_k = \frac{M^2(\xi)}{M(\xi) + \varepsilon}. \quad (13)$$

Wenn Probeelementzahl n_2 aus der Menge genommen würde, so ist die kleinere Zuverlässigkeitsgrenze $M(\xi) - \varepsilon$ und die grössere in diesem Falle

$$I_k = \frac{M^2(\xi)}{M(\xi) - \varepsilon}. \quad (14)$$

Die Zuverlässigkeitsbereiche sind bei der Probeelementzahl n_1 :

$$\frac{M^2(\xi)}{M(\xi) + \varepsilon} \leq \bar{x} \leq M(\xi) + \varepsilon, \quad (15)$$

bzw, aufgrund $\varepsilon = \varphi M(\xi)$,

$$\frac{M(\xi)}{1 + \varphi} \leq \bar{x} \leq M(\xi)[1 + \varphi], \quad (16)$$

und bei der Probeelementenzahl n_2 :

$$M(\xi) - \varepsilon \leq \bar{x} \leq \frac{M^2(\xi)}{M(\xi) - \varepsilon}, \quad (17)$$

$$M(\xi) [1 - \varphi] \leq \bar{x} \leq \frac{M(\xi)}{1 - \varphi}, \quad (18)$$

und diese Bereiche decken mit der Wahrscheinlichkeit $2\Phi(\lambda) - 1$ den Wert $\bar{x}$ ein. Dieser Wert $\bar{x}$ muss mit Methode von Maximum — Likelihood berechnet werden [2, 3].

Wenn gibt es eine lognormale Verteilung und kennen wir nicht den Erwartungswert und die Streuung dieser lognormalen Verteilung, aber nehmen wir aus dieser Menge Probeelementzahl n_1 dann können wir die Werte $M(\xi)$, $D^2(\xi)$ und v schätzen und zur Rechnung der Zuverlässigkeitsbereiche z.B. aus der Beziehung (12) herleiten

$$1 + \varphi = \text{num } \lg \lambda \left[\frac{\lg(1 + v^2)}{2,3n} \right]^{1/2}, \quad (19)$$

oder

$$1 - \varphi = \text{num } \lg(-\lambda) \left[\frac{\lg(1 + v^2)}{2,3n} \right]^{1/2}. \quad (20)$$

Mit diesen Daten ($1 + \varphi$, bzw. $1 - \varphi$) können wir nach (16) oder (18) die Zuverlässigkeitsgrenzen berechnen und ist es verständlich dass wir in beide Fälle dieselbe Werte enthalten.

Für zahlreiche Erzvorkommen hat man festgestellt, dass die Mächtigkeit des Erzganges, die Verteilung des Metallgehaltes (und natürlich deren Produkt, also z.B. die auf 1 m² des Vorkommen fallende Metallmenge (die logonormale Verteilung befolgen [4, 5]. So würde dasselbe auch für ein ungarisches Erzvorkommen aufgrund von 3 000 Proben mittels statistischer Methoden bestimmt [6]. Laut interträgigen Probenahmen beträgt der durchschnittliche Zinkgehalt eines Erzganges aufgrund von 34 Proben: 8,03% und die Streuung 2,72 [6]. Eine lognormale Verteilung vorausgesetzt fällt der Erwartungswert des Metallgehaltes bei einer praktisch sicheren (95, 4%-igen) Wahrscheinlichkeitsstufe ($\lambda^2 = 2$) zwischen 8,99 und 7,17 %. Wählt man φ zu 0,10, erhält man für $n_1(1051 \times 0,0472 = 48,9) \approx 49$, es sind also weitere 15 Proben zu nehmen, — und die Zuverlässigkeitsgrenzen sind: $(8,03 + 0,803) \approx 8,83$ und $(8,03)^2 0,83 \approx 7,30^*$. Im Falle von n_2 : $(831 \times 0,0472 = 39,2) \approx 40$ Probeelementen wobei also weitere 6 Proben zu nehmen sind) sind nötig: betragen die Zuverlässigkeitsgrenzen $(8,03 - 0,803) \approx 7,23$ bzw. $(8,03^2) 7,23 \approx 8,92\%$.

Das Rechnen mit den hergeleiteten Zusammenhängen wird man besonders bei der Planung neuer Schürfb Bohrungen und untätiger Probe-nahme bzw. bei der Kalkulation der Erzund Metallvorrates verwenden können. Aus [6] geht hervor, dass innerhalb eines Erzgebietes die relativen Streuungen ($D(\xi)$, $M(\xi)$) für die verschiedenen Erzgebietes ungefähr gleich sind, weshalb für den noch unerschürften Teil des Erzvorkommens die Anzahl der Bohr-löcher mit Gleichung (12) geplant werden kann.

TABELLE I.

Zahlenwerte zur Bestimmung der Probeelementenzahl

φ	$2,3[\lg(1 + \varphi)]^2$	$2,3[\lg(1 - \varphi)]^2$	$\frac{4}{2,3[\lg(1 + \varphi)]^2}$	$\frac{4}{2,3[\lg(1 - \varphi)]^2}$
1	2	3	4	5
0,01	0,00004295	0,00004382	93130	91280
0,02	0,0001701	0,0001771	23520	22590
0,05	0,001033	0,001141	3872	3506
0,10	0,003941	0,004816	1015	831
0,15	0,008474	0,01146	472	349
0,20	0,01442	0,02160	277	185
0,25	0,02160	0,03706	185	108

TABELLE II:

Probeelementzahlen bei verschiedenen Werte von u und v mit Zusammenhang [12]

Relative Streuung V	Anteil der gewählten Abweichung					
	0,01		0,02		0,05	
	n_1	n_2	n_1	n_2	n_1	n_2
1	2	3	4	5	6	7
0,01	4,04	3,96	1,02	0,98	0,17	0,15
0,02	16,2	15,9	4,08	3,92	0,67	0,61
0,05	101	99,0	25,5	24,5	4,20	3,80
0,1	402	394	101	97,6	16,7	15,2
0,2	562	551	142	136	23,4	21,2
0,5	9025	8846	2279	2189	375	339

Relative Streuung V	Anteil der gewählten Abweichung							
	0,10		0,15		0,20		0,25	
	n_1	n_2	n_1	n_2	n_1	n_2	n_1	n_2
1	8	9	10	11	12	13	14	15
0,01	0,044	0,036	0,020	0,015	0,012	0,0080	0,0080	0,0047
0,02	0,18	0,14	0,082	0,061	0,048	0,032	0,032	0,019
0,05	1,10	0,90	0,51	0,38	0,30	0,20	0,20	0,12
0,1	4,37	3,59	2,04	1,51	1,18	0,80	0,80	0,47
0,2	6,13	5,02	2,85	2,11	1,67	1,12	1,12	0,65
0,5	98,4	80,5	45,7	33,8	26,8	1,79	17,9	10,5

BEZOGONES SCHRIFTUM

- [1] Analyse der Metalle, 3 B., Probenahme. Springer-Verlag, (Berlin) Göttingen Heidelberg, 1956.
- [2] András Prékopa: Wahrscheinlichkeitstheorie. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1962. Ungarisch.
- [3] Aichison, I. Brown, J.A.C.: The lognormal distribution Cambridge University Press 1957.
- [4] H.T. de Wijs: Die statistische Auswertung der Probenahme von Erzlagerstätten, ERZMETALL. 1953. Heft 9. S.348—350.
- [5] Donath, M.: Betrachtungen zur Einteilung von Lagerstättenvorräten, ERZMETALL, 1957. Heft 10. S. 365—69.
- [6] Béla Kun: Verfahren der Bestimmung der wichtigsten Kennwerte von Erzvorkommen des Mátra — Gebirges und die Genauigkeit deren Bestimmung. Manuskript, 1966. (Ungarisch).

In der Redaktion am 10.I.1969.

VIBRAȚIILE MEDIILOR CONTINUE ELASTICE *)

P. P. TEODORESCU

După o trecere în revistă a problemelor vibrațiilor liniare ale solidelor elastice, în cazul a două sau trei dimensiuni, se dau formulări matematice generale în tensiuni. Problema vibrațiilor proprii și problema vibrațiilor forțate sînt rezolvate în aceste două cazuri pentru domenii finite avînd forma unui dreptunghi sau a unui paralelipiped și pentru toate domeniile infinite mărginite de drepte sau plane paralele cu axele de coordonate sau planele de coordonate (de exemplu, semiplanul elastic, banda plană elastică, sferul de plan elastic, semibanda plană elastică, semispațiul elastic, sferul de spațiu elastic etc). Rezultatele obținute mai sus se extind la problemele corespunzătoare ale corpurilor anizotrope sau neomogene.

§ 1. Introducere

Problemele elastodinamicii au format obiectul a numeroase studii încă de la începutul secolului trecut; în special s-au căutat formulări generale ale problemei pentru cazul tridimensional, omogen, izotrop și liniar elastic. Primii care au găsit o rezolvare a acestor probleme au fost G. G. Stokes [28] și A. Clebsch [6], cu ajutorul unei funcții scalare și a unei funcții vectoriale, folosind descompunerea unui vector într-un gradient și un rotor. Mult mai târziu, M. Iacovache [10] a găsit un analog al vectorului lui Galerkin [8] pentru această problemă și anume în cadrul unei soluții în deplasări, care este convenabilă pentru cea de-a doua problemă fundamentală (condiții pe contur în deplasări); aceste rezultate au fost re-luate de E. Sternberg și R. A. Eubanks [27], care au dat o reprezentare generală, constituind o generalizare a reprezentării dată de P. F. Papkovici [20] și H. Neuber [17]. D. Ionescu [12] a studiat descompunerea în unde primare și unde secundare. În anii 1959 și 1960, J. Ignaczak [11] și, independent de acesta, noi [45], [46] am stabilit ecuațiile de tip Beltrami pentru problema dinamică tridimensională a teoriei elasticității. Probleme în două variabile cu simetrie axială au considerat W. Noll [18] și, mai ales, M. Predelleanu [21].

*) Raport prezentat la a treia conferință de vibrații neliniare, ținută la Berlin între 25—30 mai 1964 (Abh. der deutschen Akad. der Wiss. zu Berlin, Kl. für Math., Physik u. Technik, nr. 2, 1965).

Problema plană corespunzătoare a fost studiată mai târziu. Ea a fost formulată în deplasări de L. Sobrero, [26], în 1935, în cazul unei stări de deformare plană, cu ajutorul unei singure funcții de deplasare de tip Marguerre [15]. R. E. D. Bishop [3] a reluat problema în 1953 și a formulat cazul unei stări de tensiune plană. Gr. C. Moisil [16] s-a ocupat, de asemenea, de această problemă și a găsit o soluție în deplasări cu ajutorul a două funcții de deplasare și o soluție în tensiuni cu ajutorul a trei funcții de tensiune. În 1956, noi [30] am formulat problema în tensiuni, cu ajutorul unei singure funcții de tensiune de tip Airy [1], [2]. J. R. M. Radok [22] a găsit în același timp o formulare analoagă, care este legată de metoda funcțiilor de variabilă complexă. Această formulare a fost reluată de noi [34], [56] ulterior.

În lucrarea sa de doctorat, S. Kaliski [13] a considerat probleme concrete la limită, în special probleme tridimensionale, unde a folosit — de asemenea — metoda funcțiilor potențial, atât pentru corpuri elastice cât și pentru corpuri viscoelastice. N. M. Borodacev [5] a extins metodele lui M. Ribière [25] și L. N. G. Filon [7] la problema plană staționară. O prezentare generală a acestor probleme se găsește în monografia lui W. Nowacki [19]; N. Șandru [29] a arătat că este util să se folosească teoria funcțiilor generalizate, în sensul teoriei distribuțiilor, pentru aceste probleme.

În cele de mai sus s-au menționat câteva lucrări ale elastodinamicii liniare, care par mai interesante, fără a epuiza nici pe departe numeroasele articole publicate pînă în prezent și care tratează asemenea probleme. De asemenea, nu au fost amintite acele lucrări care se ocupă cu studiul diferitelor probleme la limită sau cu probleme speciale.

Problemele neliniare apar, mai ales, în cazul deformărilor mari (elastodinamica neliniară), fiind puțin studiate pînă în prezent. Ele mai pot apare în cazul unor probleme speciale (de exemplu, în cazul considerării unui câmp electromagnetic), sau în cazul corpurilor neomogene.

În cele ce urmează se va încerca să se prezinte pe scurt câteva din rezultatele obținute de autor [30], [45], [46], [56], [60], [61] în domeniul elastodinamicii liniare și să se dea formulări generale în tensiuni pentru cazul bidimensional și pentru cazul tridimensional. Pentru aceste două cazuri s-au rezolvat problema vibrațiilor proprii și problema vibrațiilor forțate (staționare) pentru domenii finite de formă dreptunghiulară sau paralelipipedică, ca și pentru unele domenii infinite care se obțin din acestea dacă unele laturi sau fețe sînt aruncate la infinit (de exemplu, semiplanul elastic, banda elastică plană, sfertul de plan elastic, semibanda elastică plană, semispațiul elastic, sfertul de spațiu elastic, optimea de spațiu elastic etc).

Apoi se vor cerceta unele cazuri particulare ca și cazul corpurilor neomogene, pentru care problemele devin neliniare, arătîndu-se diferite metode de rezolvare pentru aceste cazuri. Deoarece în problemele tridimensionale considerate apar direcții privilegiate nu se va folosi calculul tensorial.

§. 2. Formularea în tensiuni a problemei plane a elastodinamicii

2.1. *Formulare generală.* Tensiunile normale se pot exprima sub forma

$$(2.1) \quad \begin{cases} \sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - (1 + \mu) \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}, \\ \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - (1 + \mu) \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}, \end{cases}$$

iar tensiunea tangențială va fi dată de

$$(2.1') \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \iint \square_1 F dx dy + \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [f_1(y; t) + f_2(x; t)].$$

Componentele vectorului deplasare sînt:

$$(2.2) \quad \begin{cases} Eu = \int \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dx - \mu \frac{\partial F}{\partial x} - (1 - \mu^2) \frac{\rho}{E} \int \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} dx + \frac{\partial f_1(y; t)}{\partial y}, \\ Ev = \int \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dy - \mu \frac{\partial F}{\partial y} - (1 - \mu^2) \frac{\rho}{E} \int \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} dy + \frac{\partial f_2(x; t)}{\partial x}. \end{cases}$$

Funcția de tensiune $F = F(x, y; t)$ trebuie să verifice dubla ecuație a undelor

$$(2.3) \quad \square_1 \square_2 F = 0,$$

în care operatorii lui d'Alembert sînt dați de

$$(2.4) \quad \square_i \equiv \Delta - \frac{1}{c_i^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (i = 1, 2),$$

iar Δ este operatorul lui Laplace

$$(2.5) \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

c_i fiind vitezele de propagare ale undelor și anume

$$(2.6) \quad \frac{1}{c_i^2} = (1 - \mu^2) \frac{\rho}{E}, \quad \frac{1}{c_2^2} = 2(1 + \mu) \frac{\rho}{E}.$$

Indicele 1 corespunde undelor primare (unde P); acestea sînt unde longitudinale de dilatare și comprimare pentru care rotația se anulează, deci unde irotaționale. Indicele 2 corespunde undelor secundare (unde S); acestea sînt unde transversale, care corespund unei deformări sub volum constant, deci unei stări de deformare incompresibilă.

Funcțiile $f_1(y; t)$ și $f_2(x; t)$ de o singură variabilă spațială sînt date de ecuația cu variabile spațiale separate

$$(2.7) \quad \int \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} dx + \int \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} dy + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} - (1 - \mu^2) \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\int \frac{\partial F}{\partial y} dx + \int \frac{\partial F}{\partial x} dy \right) - \\ - 2(1 + \mu) \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \iint \square_1 F dx dy + \frac{\partial^2 f_1(y; t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_2(x; t)}{\partial x^2} - \\ - 2(1 + \mu) \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [f_1(y; t) + f_2(x; t)] = 0,$$

care poate fi descompusă în două ecuații de forma

$$(2.8) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 f_1(y; t)}{\partial y^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 f_1(y; t)}{\partial t^2} + F_1(y; t) + E \left[\frac{1}{c_2^2} \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} + \omega_0 \right] = 0, \\ \frac{\partial^2 f_2(x; t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 f_2(x; t)}{\partial t^2} + F_2(x; t) - E \left[\frac{1}{c_2^2} \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} + \omega_0 \right] = 0, \end{cases}$$

unde $\theta(t)$ este o funcție arbitrară de clasa C^2 . Prin integrare se obține

$$(2.9) \quad \begin{cases} f_1(y; t) = \varphi_1(y - c_2 t) + \psi_1(y + c_2 t) + \bar{f}_1(y; t) + E\theta(t) + E \left(-\omega_0 \frac{y^2}{2} + u_0 y \right), \\ f_2(x; t) = \varphi_2(x - c_2 t) + \psi_2(x + c_2 t) + \bar{f}_2(x; t) - E\theta(t) + E \left(\omega_0 \frac{x^2}{2} + v_0 x \right); \end{cases}$$

aici $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ sînt, de asemenea, funcții arbitrare de clasa C^2 ; $\bar{f}_1(y; t)$ și $\bar{f}_2(x; t)$ sînt integrale particulare ale ecuației (2.8), iar u_0, v_0, ω_0 sînt deplasările, respectiv rotațiile corpului considerat ca un rigid. Se observă că funcția $\theta(t)$ nu intervine în calculul nici în exprimarea tensiunii tangențiale, nici în exprimarea componentelor vectorului deplasare.

În aceste considerații ρ este masa specifică, E este modulul de elasticitate iar μ este coeficientul de contracție transversală al lui Poisson în cazul unei stări de tensiune plană. În cazul unei stări de deformare plană aceste constante elastice se înlocuiesc cu constantele elastice generalizate

$$(2.10) \quad E_0 = \frac{E}{1 - \mu^2}, \quad \mu_0 = \frac{\mu}{1 - \mu}.$$

La aceste ecuații se adaugă condițiile la limită, sub forma

$$(2.11) \quad t \geq t_0: \begin{cases} p_{nx} = \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y), \\ p_{ny} = \tau_{xy} \cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y), \end{cases}$$

unde (p_{nx}, p_{ny}) este încărcarea pe un element de contur de normală exterioră $\vec{n}$.

Condițiile inițiale sînt de forma

$$(2.12) \quad t = t_0: \begin{cases} u = U(x, y), \quad v = V(x, y), \\ \dot{u} = U'(x, y), \quad \dot{v} = V'(x, y), \end{cases}$$

funcțiile $U(x, y)$, $V(x, y)$, $U'(x, y)$, $V'(x, y)$ fiind date pe întreg domeniul considerat; ele trebuie să corespundă și cu condițiile pe contur (2.11).

2.2. *Unde primare și unde secundare.* Cu ajutorul unei teoreme a lui T. B o g g i o [4], funcția de tensiune se poate exprima sub forma

$$(2.13) \quad F(x, y; t) = F_1(x, y; t) + F_2(x, y; t),$$

unde noile funcții sînt integrale generale ale ecuațiilor

$$(2.14) \quad \square_i F_i(x, y; t) = 0.$$

În felul acesta se distinge între unde primare și unde secundare. Dacă se exprimă starea de tensiune sub forma

$$(2.15) \quad \sigma_x = \sigma_x^1 + \sigma_x^2, \quad \sigma_y = \sigma_y^1 + \sigma_y^2,$$

$$(2.15') \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^1 + \tau_{xy}^2$$

și starea de deformație sub forma

$$(2.16) \quad u = u_1 + u_2, \quad v = v_1 + v_2,$$

se poate scrie separat starea de solicitare pentru fiecare tip de undă.

Pentru undele primare vom avea

$$(2.17) \quad \begin{cases} \sigma_x^1 = \frac{1}{2} \square_2 F_1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) F_1, \\ \sigma_y^1 = \frac{1}{2} \square_2 F_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) F_1, \end{cases}$$

$$(2.17') \quad \tau_{xy}^1 = - \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y}$$

și

$$(2.18) \quad \begin{cases} E u_1 = - (1 + \mu) \frac{\partial F_1}{\partial x} + g_1(y; t), \\ E v_1 = - (1 + \mu) \frac{\partial F_1}{\partial y} + g_2(x; t), \end{cases}$$

iar pentru undele secundare putem scrie

$$(2.19) \quad \begin{cases} \sigma_x^2 = - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) F_2, \\ \sigma_y^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) F_2, \end{cases}$$

$$(2.19') \quad \begin{aligned} \tau_{xy}^2 = & - \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y} + \frac{1}{2(1 + \mu)} \iint \Delta \square_1 F_2 dx dy + \\ & + \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [f_1(y; t) + f_2(x; t)] \end{aligned}$$

și

$$(2.20) \quad \begin{cases} Eu_2 = -\frac{1+\mu}{2} \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{1+\mu}{2} \int \frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2} dx + \frac{\partial f_1(y; t)}{\partial y}, \\ Ev_2 = -\frac{1+\mu}{2} \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{1+\mu}{2} \int \frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2} dy + \frac{\partial f_2(x; t)}{\partial x}. \end{cases}$$

Funcțiile $f_1(y; t)$ și $f_2(x; t)$ vor fi precizate de ecuația cu variabile spațiale separate

$$(2.21) \quad \begin{aligned} & \frac{1+\mu}{2} \left(\int \frac{\partial^3 F_2}{\partial y^3} dx + \int \frac{\partial^3 F_2}{\partial y^3} dy + 2 \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial y} \right) - \\ & - \iint \Delta \square_1 F_2 dx dy + \frac{\partial^2 f_1(y; t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_2(x; t)}{\partial x^2} - \\ & - \frac{2(1+\mu)\rho}{E} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [f_1(y; t) + f_2(x; t)] = 0, \end{aligned}$$

care este de aceeași formă cu ecuația (2.7) și poate fi integrată pe aceiași cale. Funcțiile $g_1(y; t)$ și $g_2(x; t)$ trebuie să verifice ecuația cu variabile spațiale separate

$$(2.22) \quad \frac{\partial g_1(y; t)}{\partial y} + \frac{\partial g_2(x; t)}{\partial x} = 0,$$

de unde rezultă

$$(2.23) \quad \begin{cases} g_1(y; t) = E(-\omega_0^1 y + u_0^1) + E\theta_1(t), \\ g_2(x; t) = E(\omega_0^1 x + v_0^1) - E\theta_1(t). \end{cases}$$

Constantele u_0^1, v_0^1 și ω_0^1 corespund unei mișcări de corp rigid și nu aduc nici o tensiune suplimentară; nici funcția $\theta_1(t)$ nu dă vreo stare de solicitare suplimentară.

2.3. Metode de rezolvare. În general, funcția de tensiune se poate exprima sub forma unei suprapunerii de vibrații armonice de perioadă T (s-a admis o mișcare periodică)

$$(2.24) \quad F(x, y; t) = \sum_m F_m(x, y) \cos(\omega_m t - \varphi_m),$$

unde φ_m este diferența de fază iar

$$(2.25) \quad \omega_m = \frac{2m\pi}{T}.$$

Funcțiile $F_m(x, y)$ sînt date de ecuația bimetaarmonică

$$(2.26) \quad (\Delta + k_{1m}^2)(\Delta + k_{2m}^2)\Omega_m(x, y) = 0,$$

unde am notat

$$(2.27) \quad k_{1m}^2 = (1 - \mu^2) \frac{\rho}{E} \omega_m^2, \quad k_{2m}^2 = 2(1 + \mu) \frac{\rho}{E} \omega_m^2;$$

funcțiile metaarmonice corespunzătoare $F_{1m}(x, y)$ și $F_{2m}(x, y)$ sînt date de ecuațiile

$$(2.28) \quad (\Delta + k_{im}^2)F_{im}(x, y) = 0 \quad (i = 1, 2).$$

Aceste ecuații descriu o stare de tensiune și o stare de deformare corespunzătoare unor vibrații staționare. În cazul unor mici mișcări nestaționare se poate efectua o transformare Laplace în raport cu timpul cu condiții inițiale omogene, prin care problema este redusă formal la o problemă staționară.

În ceea ce privește condițiile la limită se deosebesc două cazuri importante (în care nu sînt necesare condiții inițiale, ceea ce reprezintă o simplificare importantă):

a) Corpul este supus unor sarcini periodice (caz staționar). În acest caz se folosesc dezvoltări în serie Fourier în raport cu timpul, deci funcții de forma (2.24). Sarcinile exterioare se exprimă sub aceeași formă, ceea ce ușurează punerea condițiilor pe contur.

b) Corpul este supus unui șoc sau, în general, unei încărcări neperiodice. În acest caz se înlocuiește seria Fourier cu o integrală Fourier în raport cu timpul deci se folosesc funcții de forma

$$(2.29) \quad F(x, y; t) = \int_{-\infty}^{\infty} F'_\alpha(x, y) \cos \alpha t d\alpha + \int_{-\infty}^{\infty} F''_\alpha(x, y) \sin \alpha t d\alpha.$$

Sarcinile exterioare se exprimă sub aceeași formă, pentru ușurarea punerii condițiilor pe contur.

Prin separarea variabilelor se pot obține integrale particulare ale ecuațiilor (28), deci expresii de forma

$$(2.30) \quad e^{\alpha_m x + \beta_m y},$$

cu

$$(2.31) \quad \alpha_m^2 + \beta_m^2 = k_{im}^2 \quad (i = 1, 2).$$

Se obțin astfel integrale de forma

$$(2.32) \quad e^{\pm \alpha_{mn} y} \sin \gamma_{mn} x, \quad e^{\pm \alpha_{mn} y} \cos \gamma_{mn} x$$

sau de forma

$$(2.33) \quad \begin{cases} \operatorname{ch} \alpha_{mn} y \sin \gamma_{mn} x, & \operatorname{sh} \alpha_{mn} y \sin \gamma_{mn} x, \\ \operatorname{ch} \alpha_{mn} y \cos \gamma_{mn} x, & \operatorname{sh} \alpha_{mn} y \cos \gamma_{mn} x, \end{cases}$$

unde trebuie îndeplinite condițiile

$$(2.34) \quad \alpha_{mn}^2 + k_{im}^2 = \gamma_{mn}^2 \quad (i = 1, 2).$$

Se obțin integrale analoage și prin intervertirea variabilelor x și y . Prin suprapunerea efectelor se pot construi serii Fourier și integrale Fourier care sînt utile la rezolvarea a diferite probleme la limită (în special pentru domenii al căror contur este format din curbe coordonate). Se poate

demonstra cu ușurință că, pentru funcții de tensiune de această formă, funcțiile $F_1(y; t)$ și $F_2(x; t)$ de o singură variabilă spațială sînt egale cu zero.

În cazul unor condiții la limită neomogene se obține o stare de tensiune corespunzătoare unor vibrații forțate, încărcarea pe contur funcționînd ca o sarcină perturbatoare. În cazul unor condiții la limită omogene (fără sarcini exterioare pe contur) se obține o ecuație caracteristică, care corespunde vibrațiilor proprii ale corpului elastic.

§ 3. Formularea în tensiuni a problemei spațiale a elastodinamicii

3.1. *Formulare generală.* Starea de tensiune este de forma ¹

$$(3.1) \quad \sigma_x = \square_1 F_x - \frac{3}{2 + \mu} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\mu(1 + \mu)}{1 - \mu} \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] F,$$

$$(3.1') \quad \tau_{yz} = -\frac{3}{2 + \mu} \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} + \varphi_x + \frac{\partial}{\partial x} (F_{xy} - F_{zx}) + \frac{1}{2c_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (f_{xy} + f_{zx}),$$

iar starea de deformare se poate scrie

$$(3.2) \quad \frac{E}{1 + \mu} [u - (-y\omega_z^0 + z\omega_y^0 + u_0)] = \square_1 \int \left(F_x - \frac{3\mu}{2 + \mu} F \right) dx - \\ - \frac{3}{2 + \mu} \frac{\partial F}{\partial x} + \left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right) f_{yz},$$

unde funcțiile $F_x(x, y, z; t)$, $F_y(x, y, z; t)$, $F_z(x, y, z; t)$ verifică dubla ecuație a undelor

$$(3.3) \quad \square_1 \square_2 \Omega(x, y, z; t) = 0$$

și am introdus notația

$$(3.4) \quad F = \frac{1}{3} (F_x + F_y + F_z).$$

Funcțiile $\varphi_x(x, y, z; t)$, $\varphi_y(x, y, z; t)$, $\varphi_z(x, y, z; t)$ verifică ecuația

$$(3.5) \quad \square_2 \chi(x, y, z; t) = 0$$

și sînt integrale particulare ale sistemului de ecuații

$$(3.6) \quad \frac{\partial \varphi_y}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x} \square_1 \left(F_x - \frac{3}{2 + \mu} F \right) + \\ + \frac{1}{2c_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \square_1 \int \left(F_x - \frac{3\mu}{2 + \mu} F \right) dx.$$

Ca integrale particulare se pot alege funcțiile

$$(3.7) \quad \varphi_x = \frac{3\mu}{2(2 + \mu)} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \iiint \square_1 F dy dz + \\ + \frac{1}{2} \square_1 \left(\int \frac{\partial F_y}{\partial z} dy + \frac{\partial F_z}{\partial y} dz \right),$$

¹ Aici și în cele ce urmează, celelalte formule se obțin prin permutări circulare.

care verifică ecuația (3.5); trebuie să avem însă grijă ca funcțiile suplimentare ce apar datorită integrării să fie astfel alese încât sistemul (3.6) să fie satisfăcut.

Funcțiile $F_{yz}(y, z; t)$, $F_{zx}(z, x; t)$, $F_{xy}(x, y; t)$ verifică, de asemenea, ecuația (3.5) și folosesc la îndeplinirea condițiilor pe contur pentru tensiunile tangențiale.

Funcțiile $f_{yz}(y, z; t)$, $f_{zx}(z, x; t)$, $f_{xy}(x, y; t)$ sînt integrale particulare ale sistemului de ecuații cu variabile separate

$$(3.8) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \frac{1}{c_z^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) f_{xy} + \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} - \frac{1}{c_x^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) f_{zx} = \\ = 2 \frac{\partial}{\partial x} (F_{xy} - F_{zx}) + \frac{3\mu}{2 + \mu} \square_1 \left[\int \frac{\partial F}{\partial z} dy + \int \frac{\partial F}{\partial y} dz + \right. \\ \left. + \iint \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c_z^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) F dy dz \right].$$

Operatorii lui d'Alambert sînt dați de

$$(3.9) \quad \square_i \equiv \Delta - \frac{1}{c_i^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (i = 1, 2),$$

unde Δ este operatorul lui Laplace

$$(3.10) \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

iar c_i este viteza de propagare a undelor dată de

$$(3.11) \quad \frac{1}{c_i^2} = \frac{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}{1 - \mu} \frac{\rho}{E}, \quad \frac{1}{c_z^2} = 2(1 + \mu) \frac{\rho}{E}.$$

Constantele u_0 , v_0 , w_0 , ω_x^0 , ω_y^0 , ω_z^0 reprezintă deplasările, respectiv rotațiile corpului considerat ca un rigid și se determină prin condițiile de fixitate în spațiu.

3.2. Unde primare și unde secundare. În baza teoremei lui T. Boggio [4], integrala generală a ecuației (3.3) se poate exprima sub forma

$$(3.12) \quad \Omega(x, y, z; t) = \chi(x, y, z; t) + \kappa(x, y, z; t),$$

unde funcțiile χ și κ verifică ecuația

$$(3.13) \quad \square_1 \chi(x, y, z; t) = 0,$$

respectiv ecuația (3.5). Această reducere a problemei la două ecuații simple ale undelor permite, ca și în cazul plan, descompunerea undelor elastice în unde primare și unde secundare.

Fie

$$(3.14) \quad F_x = F_{1x} + F_{2x},$$

cu

$$(3.15) \quad \square_i F_{ix}(x, y, z; t) = 0 \quad (i = 1, 2).$$

Cu notații similare

$$(3.16) \quad F_i = \frac{1}{3} (F_{ix} + F_{iy} + F_{iz}) \quad (i = 1, 2)$$

și

$$(3.17) \quad F = F_1 + F_2,$$

putem scrie

$$(3.18) \quad \sigma_x = \square_1 F_{2x} - \frac{3}{2 + \mu} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\mu(1 + \mu)}{1 - \mu} \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] F,$$

$$(3.18') \quad \begin{aligned} \tau_{yz} = & -\frac{3}{2 + \mu} \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} + \varphi_x + \frac{\partial}{\partial x} (F_{xy} - F_{zx}) + \\ & + \frac{1}{2c_2^2} \frac{\partial}{\partial t^2} (f_{xy} + f_{zx}), \end{aligned}$$

$$(3.18'') \quad \begin{aligned} \frac{E}{1 + \mu} [u - (-y\omega_z^0 + z\omega_y^0 + u_0)] = \square_1 \int & (F_{2x} - \\ & - \frac{3\mu}{2 + \mu} F_2) dx - \frac{3}{2 + \mu} \frac{\partial F}{\partial x} + \left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right) f_{yz}. \end{aligned}$$

Pentru φ_x , φ_y , φ_z putem alege integralele particulare

$$(3.19) \quad \begin{aligned} \varphi_x = & \frac{3\mu}{2(2 + \mu)} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \iint \square_1 F_2 dy dz + \\ & + \frac{1}{2} \square_1 \left(\int \frac{\partial F_{2y}}{\partial z} dy + \int \frac{\partial F_{2z}}{\partial y} dz \right), \end{aligned}$$

unde funcțiile f_{yz} , f_{zx} , f_{xy} sînt precizate tot de ecuațiile (3.8), unde se înlocuiește funcția F prin funcția F_2 .

Dacă reprezentăm tensiunile în mod corespunzător prin

$$(3.20) \quad \sigma_x = \sigma_x^1 + \sigma_x^2,$$

$$(3.20') \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}^1 + \tau_{yz}^2,$$

putem scrie

$$(3.21) \quad \begin{cases} \sigma_x^1 = -\frac{3}{2 + \mu} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\mu(1 + \mu)}{1 - \mu} \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] F_1, \\ \sigma_x^2 = \square_1 F_{2x} - \frac{3}{2 + \mu} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\mu(1 + \mu)}{1 - \mu} \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] F_2, \end{cases}$$

$$(3.21') \quad \begin{cases} \tau_{yz}^1 = -\frac{3}{2 + \mu} \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z}, \\ \tau_{yz}^2 = -\frac{3}{2 + \mu} \frac{\partial^2 F_2}{\partial y \partial z} + \varphi_x + \frac{\partial}{\partial x} (F_{xy} - F_{zx}) + \frac{1}{2c_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (f_{xy} + f_{zx}). \end{cases}$$

Se observă că rotirea corespunzătoare undelor primare este egală cu zero

$$(3.22) \quad \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial w_1}{\partial y} = 0.$$

Undele exprimate prin ecuația (3.13), cărora le corespunde indicele 1, vor fi deci unde irotationale; aceste unde longitudinale au caracterul unor unde de dilatare-comprimare.

Se mai observă că suma tensiunilor normale $\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2$ este egală cu zero; de asemenea, este nulă deformarea specifică volumică. În felul acesta, undele elastice exprimate prin ecuația (3.5), cărora le corespunde indicele 2, sînt unde transversale; acestor unde transversale le corespunde o deformare sub volum constant.

Reprezentările de mai sus, care ne dau starea de tensiune și starea de deformare în interiorul unui corp elastic oarecare, trebuie să fie completate prin condiții pe contur de forma

$$(3.23) \quad t \geq t_0: p_{nx} = \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y) + \tau_{zx} \cos(n, z),$$

unde $p_{nx}(t)$, $p_{ny}(t)$, $p_{nz}(t)$ sînt componentele sarcinii exterioare pe un element de arie de normală exterioară $\vec{n}$.

Aceste condiții au o formă simplă pentru corpuri care sînt mărginite de plane normale la axele de coordonate.

La condițiile pe contur se adaugă condițiile inițiale, de forma

$$(3.24) \quad t = t_0: u = U(x, y, z), \dot{u} = U'(x, y, z).$$

funcțiile $U(x, y, z)$, $V(x, y, z)$, $W(x, y, z)$, $U'(x, y, z)$, $V'(x, y, z)$, $W'(x, y, z)$ fiind date pe întreg domeniul considerat; ele trebuie să corespundă și cu condițiile pe contur (3.23).

3.3. Metode de calcul. Folosim aceleași idei ca la punctul 2.3.

Se observă că este convenabil să folosim funcții de tensiune care se construiesc cu ajutorul unor integrale ale ecuației undelor de forma

$$(3.25) \quad e^{\alpha x + \beta y + \gamma z},$$

unde

$$(3.26) \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \frac{1}{c_i^2} \delta^2 = 0 \quad (i = 1, 2).$$

În acest caz pot fi luate egale cu zero atît funcțiile suplimentare ce apar în formulele (3.7) pentru φ_x , φ_y , φ_z , cît și funcțiile f_{yz} , f_{zx} , f_{xy} .

§ 4. Vibrații plane staționare

4.1. *Semiplanul elastic.* Se consideră semiplanul elastic $y \geq 0$, pe a cărui linie de separație acționează o sarcină normală periodică de forma

$$(4.1) \quad p(x; t) = p(x) \sin \omega t.$$

Pentru ușurarea calculului se consideră numai un singur membru al dezvoltării în raport cu timpul; în cazul unei serii Fourier sau în cazul unei integrale Fourier în raport cu această variabilă se poate obține soluția pornind de la rezultatele de mai jos, prin suprapunerea efectelor.

Fie o sarcină normală periodică în raport cu variabila x și antisimetrică în raport cu originea O , de forma

$$(4.2) \quad p(x) = \sum_n a_n \sin \gamma_n x,$$

cu perioada $L_x = 2a$, unde

$$(4.3) \quad \gamma_n = \frac{n\pi}{a} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Cazul unei sarcini normale simetrică în raport cu O , ca și cazul unei sarcini tangențiale se studiază analog.

Se alege o funcție de tensiune impară în raport cu x , de forma

$$(4.4) \quad F(x, y; t) = \sin \omega t \sum_n (A_n e^{-\alpha_n y} + B_n e^{-\beta_n y}) \sin \gamma_n x,$$

ale cărei șiruri de coeficienți A_n, B_n se precizează prin condițiile pe contur

$$(4.5) \quad y = 0: \sigma_y = p(x; t), \quad \tau_{yx} = 0.$$

Prin modul în care s-a ales funcția de tensiune, componentele tensorului tensiune vor tinde către zero pentru $y \rightarrow \infty$.

Trebuie îndeplinite condițiile

$$(4.6) \quad \gamma_n^2 = \alpha_n^2 + (1 - \mu^2) \frac{\rho}{E} \omega^2 = \beta_n^2 + 2(1 + \mu) \frac{\rho}{E} \omega^2.$$

Cu ajutorul formulelor (2.1), (2.1') se găsesc tensiunile

$$(4.7) \quad \begin{cases} \sigma_y = -\sin \omega t \sum_n \left[\gamma_n^2 - (1 + \mu) \frac{\rho}{E} \omega^2 \right] (A_n e^{-\alpha_n y} + B_n e^{-\beta_n y}) \sin \gamma_n x, \\ \tau_{xy} = -\sin \omega t \sum_n \frac{1}{\gamma_n} \left(\gamma_n^2 - \frac{\rho}{E} \omega^2 \right) (A_n \alpha_n e^{-\alpha_n y} + B_n \beta_n e^{-\beta_n y}) \cos \gamma_n x + \\ + \sin \omega t \frac{\rho \omega^2}{E} \sum_n \frac{1}{\gamma_n} \left[\gamma_n^2 - (1 - \mu) \frac{\rho}{E} \omega^2 \right] \left(\frac{A_n}{\alpha_n} e^{-\alpha_n y} + \frac{B_n}{\beta_n} e^{-\beta_n y} \right) \cos \gamma_n x; \end{cases}$$

funcțiile $F_1(y; t)$, $F_2(x; t)$ sînt egale cu zero, iar funcțiile $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ pot fi luate egale cu zero.

Condițiile pe contur (4.5) ne dau

$$(4.8) \quad \begin{cases} -\left[\gamma_n^2 - (1 + \mu) \frac{\rho}{E} \omega^2 \right] (A_n + B_n) = a_n, \\ \left(\gamma_n^2 - \frac{\rho}{E} \omega^2 \right) (A_n \alpha_n + B_n \beta_n) + \frac{\rho \omega^2}{E} \left[\gamma_n^2 - (1 - \mu^2) \frac{\rho}{E} \omega^2 \right] \left(\frac{A_n}{\alpha_n} + \frac{B_n}{\beta_n} \right) = 0, \end{cases}$$

de unde, cu relațiile (4.6), rezultă

$$(4.8') \quad \begin{cases} (\beta_n^2 + \gamma_n^2) (A_n + B_n) = -2a_n, \\ 4\alpha_n\beta_n\gamma_n^2 A_n + (\beta_n^2 + \gamma_n^2)^2 B_n = 0. \end{cases}$$

Dacă e îndeplinită condiția

$$(4.9) \quad 4\alpha_n\beta_n\gamma_n^2 \neq (\beta_n^2 + \gamma_n^2)^2,$$

se găsesc parametrii A_n , B_n sub forma

$$(4.10) \quad \begin{cases} A_n = -\frac{2(\beta_n^2 + \gamma_n^2)}{(\beta_n^2 + \gamma_n^2)^2 - 4\alpha_n\beta_n\gamma_n^2} a_n, \\ B_n = \frac{8\alpha_n\beta_n\gamma_n^2}{(\beta_n^2 + \gamma_n^2)^2 - 4\alpha_n\beta_n\gamma_n^2} a_n, \end{cases}$$

iar funcția de tensiune este

$$(4.11) \quad F(x, y; t) = -2 \sin \omega t \sum_n a_n \frac{(\beta_n^2 + \gamma_n^2) e^{-\alpha_n y} - 4\alpha_n\beta_n\gamma_n^2 e^{-\beta_n y}}{(\beta_n^2 + \gamma_n^2)^2 [(\beta_n^2 + \gamma_n^2)^2 - 4\alpha_n\beta_n\gamma_n^2]} \sin \gamma_n x.$$

Rezultă starea de tensiune

$$(4.12) \quad \begin{cases} \sigma_x = -\sin \omega t \sum_n a_n \frac{(\beta_n^2 + \gamma_n^2) (2\alpha_n^2 - \beta_n^2 + \gamma_n^2)^2 e^{-\alpha_n y} - 4\alpha_n\beta_n\gamma_n^2 e^{-\beta_n y}}{(\beta_n^2 + \gamma_n^2)^2 - 4\alpha_n\beta_n\gamma_n^2} \sin \gamma_n x, \\ \sigma_y = \sin \omega t \sum_n a_n \frac{(\beta_n^2 + \gamma_n^2)^2 e^{-\alpha_n y} - 4\alpha_n\beta_n\gamma_n^2 e^{-\beta_n y}}{(\beta_n^2 + \gamma_n^2)^2 - 4\alpha_n\beta_n\gamma_n^2} \sin \gamma_n x, \end{cases}$$

$$(4.12') \quad \tau_{xy} = -2 \sin \omega t \sum_n a_n \frac{\alpha_n\beta_n(\beta_n^2 + \gamma_n^2)}{(\beta_n^2 + \gamma_n^2)^2 - 4\alpha_n\beta_n\gamma_n^2} (e^{-\alpha_n y} - e^{-\beta_n y}) \cos \gamma_n x$$

și starea de deformație

$$(4.13) \quad \begin{cases} E[u - (-\omega_0 y + u_0)] = \\ = 2(1 + \mu) \sin \omega t \sum_n a_n \gamma_n \frac{(\beta_n^2 + \gamma_n^2) e^{-\alpha_n y} - 2\alpha_n\beta_n e^{-\beta_n y}}{(\beta_n^2 + \gamma_n^2)^2 - 4\alpha_n\beta_n\gamma_n^2} \cos \gamma_n x, \\ E(v - \omega_0 x) = \\ = -2(1 + \mu) \sin \omega t \sum_n a_n \alpha_n \frac{(\beta_n^2 + \gamma_n^2) e^{-\alpha_n y} - 2\gamma_n^2 e^{-\beta_n y}}{(\beta_n^2 + \gamma_n^2)^2 - 4\alpha_n\beta_n\gamma_n^2} \sin \gamma_n x; \end{cases}$$

deplasarea u_0 și rotația ω_0 ale corpului considerat ca un rigid se determină prin condiția ca un punct al semiplanului să rămână fix.

Pe linia de separație se obține tensiunea normală

$$(4.14) \quad \sigma_x(x, 0; t) = -p(x; t) - 2(1 + \mu)^2 \frac{\rho}{E} \omega^2 \sin \omega t \sum_n a_n \frac{\beta_n^2 + \gamma_n^2}{(\beta_n^2 + \gamma_n^2)^2 - 4\alpha_n \beta_n \gamma_n^2} \sin \gamma_n x,$$

în timp ce deformarea acestei linii va fi dată de

$$(4.15) \quad E[v(x, 0; t) - \omega_0 x] = 4(1 + \mu)^2 \frac{\rho}{E} \omega^2 \sin \omega t \sum_n a_n \frac{\alpha_n}{(\beta_n^2 + \gamma_n^2)^2 - 4\alpha_n \beta_n \gamma_n^2} \sin \gamma_n x.$$

Seriile considerate sînt uniform convergente, iar seriile (4.14), (4.15) converg repede.

Pentru sarcini locale se pot folosi integrale Fourier în raport cu variabila x . O asemenea cercetare a fost făcută pe altă cale, în 1904, de H. Lamb [14].

4.2. Banda elastică. Fie banda elastică $|y| \leq b$, acționată de o sarcină periodică normală $p(x; t)$ de forma (4.1) pe ambele linii de separație; considerăm astfel un caz cu o anumită simetrie de încărcare în raport cu axa Ox . Fie o sarcină normală de forma (4.2), (4.3), periodică în raport cu variabila x și antisimetrică în raport cu axa Oy .

Alegem o funcție de tensiune impară în raport cu x și pară în raport cu y , de forma

$$(4.16) \quad F(x, y; t) = \sin \omega t \sum_n (A_n \operatorname{ch} \alpha_n y + B_n \operatorname{ch} \beta_n y) \sin \gamma_n x,$$

unde parametrii $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ verifică condițiile (4.6).

Deoarece funcțiile $F_1(y; t), F_2(x; t)$ sînt egale cu zero iar funcțiile $\varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2$ pot fi alese egale cu zero, obținem tensiunile

$$(4.17) \quad \begin{cases} \sigma_y = -\sin \omega t \sum_n \left[\gamma_n^2 - (1 + \mu) \frac{\rho}{E} \omega^2 \right] (A_n \operatorname{ch} \alpha_n y + B_n \operatorname{ch} \beta_n y) \sin \gamma_n x, \\ \tau_{xy} = -\sin \omega t \sum_n \frac{1}{\gamma_n} \left(\gamma_n^2 - \frac{\rho}{E} \omega^2 \right) (A_n \alpha_n \operatorname{sh} \alpha_n y + \\ + B_n \beta_n \operatorname{sh} \beta_n y) \cos \gamma_n x - \frac{\rho \omega^2}{E} \sin \omega t \sum_n \frac{1}{\gamma_n} \left[\gamma_n^2 - \right. \\ \left. - (1 - \mu^2) \frac{\rho}{E} \omega^2 \right] \left(\frac{A_n}{\alpha_n} \operatorname{sh} \alpha_n y + \frac{B_n}{\beta_n} \operatorname{sh} \beta_n y \right) \cos \gamma_n x. \end{cases}$$

Șirurile de coeficienți A_n, B_n sînt precizate prin condițiile

$$(4.18) \quad y = \pm b; \sigma_y = \sin \omega t \sum_n a_n \sin \gamma_n x, \tau_{yx} = 0.$$

Se ajunge astfel la relațiile

$$(4.19) \quad \begin{cases} -\left[\gamma_n^2 - (1 + \mu) \frac{\rho}{E} \omega^2\right] (A_n \operatorname{ch} \alpha_n b + B_n \operatorname{ch} \beta_n b) = a_n, \\ \left(\gamma_n^2 - \frac{\rho}{E} \omega^2\right) (A_n \alpha_n \operatorname{sh} \alpha_n b + B_n \beta_n \operatorname{sh} \beta_n b) + \\ + \frac{\rho \omega^2}{E} \left[\gamma_n^2 - (1 - \mu^2) \frac{\rho}{E} \omega^2\right] \left(\frac{A_n}{\alpha_n} \operatorname{sh} \alpha_n b + \frac{B_n}{\beta_n} \operatorname{sh} \beta_n b\right) = 0, \end{cases}$$

astfel încît, cu ajutorul condițiilor (4.6), putem scrie

$$(4.19') \quad \begin{cases} (\beta_n^2 + \gamma_n^2) (A_n \operatorname{ch} \alpha_n b + B_n \operatorname{ch} \beta_n b) = -2a_n, \\ 4\alpha_n \beta_n \gamma_n^2 A_n \operatorname{sh} \alpha_n b + (\beta_n^2 + \gamma_n^2)^2 B_n \operatorname{sh} \beta_n b = 0. \end{cases}$$

Dacă este îndeplinită condiția

$$(4.20) \quad 4\alpha_n \beta_n \gamma_n^2 \operatorname{th} \alpha_n b \neq (\beta_n^2 + \gamma_n^2)^2 \operatorname{th} \beta_n b,$$

găsim coeficienții A_n , B_n sub forma

$$(4.21) \quad \begin{cases} A_n = -\frac{2(\beta_n^2 + \gamma_n^2)}{\operatorname{sh} \alpha_n b [(\beta_n^2 + \gamma_n^2)^2 \operatorname{cth} \alpha_n b - 4\alpha_n \beta_n \gamma_n^2 \operatorname{cth} \beta_n b]} a_n, \\ B_n = \frac{8\alpha_n \beta_n \gamma_n^2}{\operatorname{sh} \beta_n b (\beta_n^2 + \gamma_n^2) [(\beta_n^2 + \gamma_n^2)^2 \operatorname{cth} \alpha_n b - 4\alpha_n \beta_n \gamma_n^2 \operatorname{cth} \beta_n b]} a_n. \end{cases}$$

Funcția de tensiune capătă forma

$$F(x, y; t) =$$

$$(4.22) \quad = -2 \sin \omega t \sum_n a_n \frac{(\beta_n^2 + \gamma_n^2)^2 \frac{\operatorname{ch} \alpha_n y}{\operatorname{sh} \alpha_n b} - 4\alpha_n \beta_n \gamma_n^2 \frac{\operatorname{ch} \beta_n y}{\operatorname{sh} \beta_n b}}{(\beta_n^2 + \gamma_n^2) [(\beta_n^2 + \gamma_n^2)^2 \operatorname{cth} \alpha_n b - 4\alpha_n \beta_n \gamma_n^2 \operatorname{cth} \beta_n b]} \sin \gamma_n x,$$

iar starea de tensiune și starea de deformare se pot calcula cu ușurință.

Un studiu analog al acestei probleme este posibil cu ajutorul unei funcții de tensiune de forma

$$(4.23) \quad F(x, y; t) = \sin \omega t \sum_n (A_n \cos \alpha_n y + B_n \cos \beta_n y) \sin \gamma_n x,$$

între parametri fiind valabile relațiile

$$(4.24) \quad \gamma_n^2 = (1 - \mu^2) \frac{\rho}{E} \omega^2 - \alpha_n^2 = 2(1 + \mu) \frac{\rho}{E} \omega^2 - \beta_n^2.$$

Deoarece funcțiile $F_1(y; t)$, $F_2(x; t)$ sînt nule iar funcțiile φ_1 , φ_2 , ψ_1 , ψ_2 se iau egale cu zero, tensiunile vor fi date de

$$(4.25) \quad \begin{cases} \sigma_y = \sin \omega t \sum_n \left[\gamma_n^2 - (1 + \mu) \frac{\rho}{E} \omega^2 \right] (A_n \cos \alpha_n y + \\ \quad + B_n \cos \beta_n y) \sin \gamma_n x, \\ \tau_{xy} = \sin \omega t \sum_n \frac{1}{\gamma_n} \left(\gamma_n^2 - \frac{\rho}{E} \omega^2 \right) (A_n \alpha_n \sin \alpha_n y + B_n \beta_n \sin \beta_n y) \cos \gamma_n x - \\ \quad - \frac{\rho \omega^2}{E} \sin \omega t \sum_n \frac{1}{\gamma_n} \left[\gamma_n^2 - (1 - \mu^2) \frac{\rho}{E} \omega^2 \right] \left(\frac{A_n}{\alpha_n} \sin \alpha_n y + \right. \\ \quad \left. + \frac{B_n}{\beta_n} \sin \beta_n y \right) \cos \gamma_n x. \end{cases}$$

Cu condițiile la limită (4.18) se ajunge la relațiile

$$(4.26) \quad \begin{cases} - \left[\gamma_n^2 - (1 + \mu) \frac{\rho}{E} \omega^2 \right] (A_n \cos \alpha_n b + B_n \cos \beta_n b) = a_n, \\ \left(\gamma_n^2 - \frac{\rho}{E} \omega^2 \right) (A_n \alpha_n \sin \alpha_n b + B_n \beta_n \sin \beta_n b) - \\ - \frac{\rho \omega^2}{E} \left[\gamma_n^2 - (1 - \mu^2) \frac{\rho}{E} \omega^2 \right] \left(\frac{A_n}{\alpha_n} \sin \alpha_n b + \frac{B_n}{\beta_n} \sin \beta_n b \right) = 0, \end{cases}$$

de unde rezultă

$$(4.26') \quad \begin{cases} (\gamma_n^2 - \beta_n^2) (A_n \cos \alpha_n b + B_n \cos \beta_n b) = -2a_n, \\ 4\alpha_n \beta_n \gamma_n^2 A_n \sin \alpha_n b - (\gamma_n^2 - \beta_n^2) B_n \sin \beta_n b = 0, \end{cases}$$

unde am ținut seama de (4.24).

Dacă este îndeplinită condiția

$$(4.27) \quad 4\alpha_n \beta_n \gamma_n^2 \operatorname{tg} \alpha_n b + (\gamma_n^2 - \beta_n^2)^2 \operatorname{tg} \beta_n b \neq 0,$$

găsim coeficienții A_n , B_n sub forma

$$(4.28) \quad \begin{cases} A_n = - \frac{2(\gamma_n^2 - \beta_n^2)}{\sin \alpha_n b [(\gamma_n^2 - \beta_n^2)^2 \operatorname{ctg} \alpha_n b - 4\alpha_n \beta_n \gamma_n^2 \operatorname{ctg} \beta_n b]} a_n, \\ B_n = \frac{8\alpha_n \beta_n \gamma_n^2}{\sin \beta_n b (\gamma_n^2 - \beta_n^2) [(\gamma_n^2 - \beta_n^2)^2 \operatorname{ctg} \alpha_n b - 4\alpha_n \beta_n \gamma_n^2 \operatorname{ctg} \beta_n b]} a_n. \end{cases}$$

Funcția de tensiune va fi

$$(4.29) \quad \begin{aligned} F(x, y; t) = \\ = -2 \sin \omega t \sum_n a_n \frac{(\gamma_n^2 - \beta_n^2) \frac{\cos \alpha_n y}{\sin \alpha_n b} - 4 \alpha_n \beta_n \gamma_n^2 \frac{\cos \beta_n y}{\sin \beta_n b}}{(\gamma_n^2 - \beta_n^2) [(\gamma_n^2 - \beta_n^2)^2 \operatorname{ctg} \alpha_n b - 4 \alpha_n \beta_n \gamma_n^2 \operatorname{ctg} \beta_n b]} \sin \gamma_n x, \end{aligned}$$

iar starea de tensiune și starea de deformare se pot calcula cu ușurință.

Dacă banda elastică este acționată pe liniile de separație de o sarcină normală (4.1), antisimetrică în raport cu axa Ox , putem folosi o funcție de tensiune de forma

$$(4.30) \quad F(x, y; t) = \sin \omega t \sum_n (A_n \operatorname{sh} \alpha_n y + B_n \operatorname{sh} \beta_n y) \sin \gamma_n x,$$

ai cărei parametri α_n , β_n , γ_n sînt legați prin relațiile (4.6).

Cu condițiile pe contur

$$(4.31) \quad y = \pm b: \sigma_y = \pm \sin \omega t \sum_n a_n \sin \gamma_n x, \quad \tau_{yx} = 0$$

se ajunge la relațiile

$$(4.32) \quad \begin{cases} (\beta_n^2 + \gamma_n^2) (A_n \operatorname{sh} \alpha_n b + B_n \operatorname{sh} \beta_n b) = -2a_n, \\ 4 \alpha_n \beta_n \gamma_n^2 A_n \operatorname{ch} \alpha_n b + (\beta_n^2 + \gamma_n^2)^2 B_n \operatorname{ch} \beta_n b = 0. \end{cases}$$

Dacă condiția

$$(4.33) \quad 4 \alpha_n \beta_n \gamma_n^2 \operatorname{cth} \alpha_n b \neq (\beta_n^2 + \gamma_n^2)^2 \operatorname{cth} \beta_n b$$

este îndeplinită, se găsesc coeficienții A_n , B_n sub forma

$$(4.34) \quad \begin{cases} A_n = - \frac{2(\beta_n^2 + \gamma_n^2)}{\operatorname{ch} \alpha_n b [(\beta_n^2 + \gamma_n^2)^2 \operatorname{th} \alpha_n b - 4 \alpha_n \beta_n \gamma_n^2 \operatorname{th} \beta_n b]} a_n, \\ B_n = \frac{8 \alpha_n \beta_n \gamma_n^2}{\operatorname{ch} \beta_n b (\beta_n^2 + \gamma_n^2) [(\beta_n^2 + \gamma_n^2)^2 \operatorname{th} \alpha_n b - 4 \alpha_n \beta_n \gamma_n^2 \operatorname{th} \beta_n b]} a_n, \end{cases}$$

iar funcția de tensiune devine

$$(4.35) \quad \begin{aligned} F(x, y; t) = \\ = -2 \sin \omega t \sum_n a_n \frac{(\beta_n^2 + \gamma_n^2)^2 \frac{\operatorname{sh} \alpha_n y}{\operatorname{ch} \alpha_n b} - 4 \alpha_n \beta_n \gamma_n^2 \frac{\operatorname{sh} \beta_n y}{\operatorname{ch} \beta_n b}}{(\beta_n^2 + \gamma_n^2) [(\beta_n^2 + \gamma_n^2)^2 \operatorname{th} \alpha_n b - 4 \alpha_n \beta_n \gamma_n^2 \operatorname{th} \beta_n b]} \sin \gamma_n x, \end{aligned}$$

astfel încît starea de tensiune și starea de deformație se pot calcula cu ușurință.

Un studiu analog se poate face pornind de la o funcție de tensiune de forma

$$(4.36) \quad F(x, y; t) = \sin \omega t \sum_n (A_n \sin \alpha_n y + B_n \sin \beta_n y) \sin \gamma_n x,$$

unde parametrii α_n , β_n , γ_n verifică condițiile (4.24).

Cu ajutorul condițiilor pe contur (4.31) se ajunge la relațiile

$$(4.37) \quad \begin{cases} (\gamma_n^2 - \beta_n^2) (A_n \sin \alpha_n b + B_n \sin \beta_n b) = -2a_n, \\ 4 \alpha_n \beta_n \gamma_n^2 A_n \cos \alpha_n b - (\gamma_n^2 - \beta_n^2)^2 B_n \cos \beta_n b = 0. \end{cases}$$

Dacă condiția

$$(4.38) \quad 4 \alpha_n \beta_n \gamma_n^2 \operatorname{ctg} \alpha_n b + (\gamma_n^2 - \beta_n^2)^2 \operatorname{ctg} \beta_n b \neq 0$$

este îndeplinită, se obțin coeficienții A_n , B_n sub forma

$$(4.39) \quad \begin{cases} A_n = - \frac{2(\gamma_n^2 - \beta_n^2)}{\cos \alpha_n b [(\gamma_n^2 - \beta_n^2)^2 \operatorname{tg} \alpha_n b - 4 \alpha_n \beta_n \gamma_n^2 \operatorname{tg} \beta_n b]} a_n, \\ B_n = \frac{8 \alpha_n \beta_n \gamma_n^2}{\cos \beta_n b (\gamma_n^2 - \beta_n^2) [(\gamma_n^2 - \beta_n^2)^2 \operatorname{tg} \alpha_n b - 4 \alpha_n \beta_n \gamma_n^2 \operatorname{tg} \beta_n b]} a_n. \end{cases}$$

Căpătăm funcția de tensiune

$$(4.40) \quad \begin{aligned} F(x, y; t) = \\ = -2 \sin \omega t \sum_n a_n \frac{(\gamma_n^2 - \beta_n^2)^2 \frac{\sin \alpha_n y}{\cos \alpha_n b} - 4 \alpha_n \beta_n \gamma_n^2 \frac{\sin \beta_n y}{\cos \beta_n b}}{(\gamma_n^2 - \beta_n^2) [(\gamma_n^2 - \beta_n^2)^2 \operatorname{tg} \alpha_n b - 4 \alpha_n \beta_n \gamma_n^2 \operatorname{tg} \beta_n b]} \sin \gamma_n x, \end{aligned}$$

cu ajutorul căreia se pot calcula starea de tensiune și starea de deformație.

Se observă că cele două tipuri de soluții prezentate sînt echivalente, dacă ținem seama de relațiile dintre funcțiile trigonometrice și funcțiile hiperbolice.

4.3. *Alte domenii plane.* Pentru rezolvarea problemelor considerate pînă în prezent s-au folosit idei date în [52] pentru probleme statice analoage.

Cu ajutorul unei familii de funcții de tensiune, analoage celor folosite în cazul static [48], se pot studia și alte domenii plane, pe aceiași cale.

Astfel, rezultatele obținute în cazul static [51] pentru sfertul de plan elastic $x \geq 0$, $y \geq 0$ pot fi extinse pentru același domeniu acționat pe linia de separație $y = 0$ de o sarcină normală de forma (4.1). Cazul unei sarcini periodice se reduce la cazul unei sarcini locale; pentru sarcina locală

$$(4.41) \quad p(x) = \int_0^\infty a(\lambda) \sin \lambda x d\lambda$$

se introduce o funcție de tensiune de forma

$$(4.42) \quad \begin{aligned} F(x, y; t) = \sin \omega t \int_0^\infty (A e^{-\alpha y} + B e^{-\beta y}) \sin \lambda x d\lambda + \\ + \sin \omega t \int_0^\infty (C e^{-\gamma x} + D e^{-\delta x}) \sin \nu y d\nu, \end{aligned}$$

unde funcțiile $A = A(\alpha)$, $B = B(\beta)$, $C = C(\gamma)$ și $D = D(\delta)$ sînt precizate de condițiile pe contur

$$(4.43) \quad \begin{aligned} x = 0: \sigma_x = 0, \quad \tau_{xy} = 0, \\ y = 0: \sigma_y = p(x; t), \quad \tau_{yx} = 0. \end{aligned}$$

Între parametrii α , β , γ , δ , λ și ν au loc relațiile

$$(4.44) \quad \begin{cases} \lambda^2 = \alpha^2 + (1 - \mu^2) \frac{\rho}{E} \omega^2 = \beta^2 + 2(1 + \mu) \frac{\rho}{E} \omega^2, \\ \nu^2 = \gamma^2 + (1 - \mu^2) \frac{\rho}{E} \omega^2 = \delta^2 + 2(1 + \mu) \frac{\rho}{E} \omega^2. \end{cases}$$

Forma aleasă pentru funcțiile de tensiune permite ca aceste funcții să se anuleze pentru $x \rightarrow \infty$ și pentru $y \rightarrow \infty$.

Din punct de vedere matematic, problema se reduce la integrarea a două ecuații de tip Fredholm de speța a doua pe un interval infinit. Nucleul, care este același pentru cele două ecuații, nu are singularități, iar ecuațiile omogene nu permit decât o soluție trivială; problema are astfel numai o singură soluție.

În cazul unei încărcări cu o sarcină tangențială se obține același sistem de ecuații integrale ca în cazul static corespunzător [51].

Fie semibanda elastică $x \geq 0$, $|y| \leq b$. În cazul unei încărcări oarecare pe cele două laturi paralele problema poate fi redusă la problema benzii elastice $|y| \leq b$, acționată de o sarcină corespunzătoare, și la problema semibenzii elastice, acționată numai pe fața de capăt ($x = 0$). În acest din urmă caz, care va fi considerat în cele ce urmează, vom considera o încărcare normală de forma

$$(4.45) \quad q(y; t) = q(y) \sin \omega t = \sin \omega t \sum_m b_m \sin \nu_m y,$$

unde

$$(4.46) \quad \nu_m = \frac{m\pi}{b} \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

și vom alege perioada $L_y = 2b$ (o încărcare antisimetrică în raport cu axa Ox).

Se introduce funcția de tensiune

$$(4.47) \quad \begin{aligned} F(x, y; t) = & \sin \omega t \int_0^\infty (A \operatorname{sh} \alpha y + B \operatorname{sh} \beta y) \sin \lambda x d\lambda + \\ & + \sin \omega t \sum_m (C_m e^{-\gamma_m x} + D_m e^{-\delta_m x}) \sin \nu_m y, \end{aligned}$$

unde parametrii, α , β , λ , γ_m , δ_m , ν_m verifică relațiile

$$(4.48) \quad \begin{cases} \lambda^2 = \alpha^2 + (1 - \mu^2) \frac{\rho}{E} \omega^2 = \beta^2 + 2(1 + \mu) \frac{\rho}{E} \omega^2, \\ \nu_m^2 = \gamma_m^2 + (1 - \mu^2) \frac{\rho}{E} \omega^2 = \delta_m^2 + 2(1 + \mu) \frac{\rho}{E} \omega^2. \end{cases}$$

Șirurile de coeficienți C_m , D_m și funcțiile $A = A(\alpha)$, $B = B(\beta)$ se precizează prin condițiile pe contur

$$(4.49) \quad \begin{cases} x = 0: & \sigma_x = q(y; t), \quad \tau_{xy} = 0, \\ y = \pm b: & \sigma_y = 0, \quad \tau_{yx} = 0. \end{cases}$$

Problema conduce la rezolvarea unui sistem de ecuații algebrice liniare cu o infinitate de necunoscute. Acest sistem este regulat și are o soluție unică, mărginită care, ca și în cazul static [49], poate fi obținută prin aproximații succesive.

Fie acum cazul dreptunghiului elastic $|x| \leq a, |y| \leq b$, care este acționat pe liniile de separație $y = \pm b$ de o sarcină normală de forma (4.1), (4.2), (4.3). Deoarece acesta este un caz de încărcare antisimetrică în raport cu ambele axe de coordonate, trebuie ca momentul încărcării pe fiecare latură să fie nul. Se aplică o funcție de tensiune de forma

$$(4.50) \quad \begin{aligned} F(x, y; t) = & \sin \omega t \sum_n (A_n \operatorname{sh} \alpha_n y + B_n \operatorname{sh} \beta_n y) \sin \gamma_n x + \\ & + \sin \omega t \sum_m (C_m \operatorname{sh} \lambda_m x + D_m \operatorname{sh} \mu_m x) \sin \nu_m y, \end{aligned}$$

unde parametrii sînt legați de relațiile (4.6) și de relațiile

$$(4.51) \quad \nu_m^2 = \lambda_m^2 + (1 - \mu^2) \frac{\rho}{E} \omega^2 = \mu_m^2 + 2(1 + \mu) \frac{\rho}{E} \omega^2,$$

iar șirurile de coeficienți sînt precizate de condițiile pe contur

$$(4.52) \quad \begin{cases} x = \pm a: \sigma_x = 0, \quad \tau_{xy} = 0, \\ y = \pm b: \sigma_y = p(x; t), \quad \tau_{yx} = 0. \end{cases}$$

Trebuie deci rezolvat un sistem infinit de ecuații algebrice liniare, care este complet regulat, ca și în cazul static corespunzător [35], [47].

Alte cazuri de încărcare, atît pentru semibanda elastică cît și pentru dreptunghiul elastic, pot fi tratate în mod analog.

Mai amintim că, atît în cazul semibenzii elastice cît și în cazul dreptunghiului elastic, funcțiile hiperbolice pot fi înlocuite prin funcții trigonometrice, obținîndu-se pe această cale rezultate analoage.

§ 5. Vibrații plane proprii

5.1. Semiplanul elastic. Undele Rayleigh. Fie cazul semiplanului elastic $y \geq 0$, fără sarcină exterioară pe linia de separație. În baza unor considerații analoage cu cele de la punctul 4.1, se alege o funcție de tensiune de forma

$$(5.1) \quad F(x, y; t) = \sum_n (\bar{C}_n \sin \omega_n t + \bar{D}_n \cos \omega_n t) (A_n e^{-\alpha_n y} + B_n e^{-\beta_n y}) \sin \gamma_n x.$$

Componentele tensorului tensiune tind către zero pentru $y \rightarrow \infty$, iar coeficienții A_n, B_n sînt precizați de condițiile

$$(5.2) \quad y = 0: \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0,$$

puse pe linia de separație.

Pe această cale se obțin relațiile

$$(5.3) \quad \begin{cases} A_n + B_n = 0, \\ 4\alpha_n\beta_n\gamma_n^2 A_n + (\beta_n^2 + \gamma_n^2) B_n = 0. \end{cases}$$

Pentru a nu căpăta o soluție trivială, trebui îndeplinită condiția

$$(5.4) \quad 4\alpha_n\beta_n\gamma_n^2 = (\beta_n^2 + \gamma_n^2)^2.$$

Un studiu de acest fel a fost făcut pentru prima dată de Rayleigh [23], [24], în 1887, iar undele corespunzătoare îi poartă numele. Cu viteza undelor Rayleigh

$$(5.5) \quad c = \frac{\omega_n}{\gamma_n}$$

și cu raportul adimensional

$$(5.6) \quad \chi = \left(\frac{c^2}{c}\right)^2,$$

condiția (5.4) conduce la ecuația

$$(5.7) \quad 4\chi\sqrt{\chi-1}\sqrt{\chi-\frac{1-\mu}{2}} = (2\chi-1)^2,$$

unde s-au folosit formulele (2.6), ca și faptul că relațiile

$$(5.8) \quad \gamma_n^2 = \alpha_n^2 + (1-\mu^2)\frac{\rho}{E}\omega_n^2 = \beta_n^2 + 2(1+\mu)\frac{\rho}{E}\omega_n^2$$

conduc la

$$(5.9) \quad \alpha_n = \sqrt{1 - \frac{1-\mu}{2\chi}}\gamma_n, \quad \beta_n = \sqrt{1 - \frac{1}{\chi}}\gamma_n.$$

Prin ridicarea la pătrat a relației (5.7) se ajunge la

$$(5.7') \quad (1+\mu)\chi^3 - (2+\mu)\chi^2 + \chi - \frac{1}{8} = 0,$$

ceea ce este valabil într-un caz de tensiune plană. Cu ajutorul formulelor (2.10) se găsește, pentru o stare de deformare plană (semispațiul elastic al lui Rayleigh) ecuația

$$(5.7'') \quad \chi^3 - (2-\mu)\chi^2 + (1-\mu)\chi - \frac{1}{8}(1-\mu) = 0.$$

Fie

$$(5.10) \quad f(\chi) = (1+\mu)\chi^3 - (2+\mu)\chi^2 + \chi - \frac{1}{8}$$

și

$$(5.10') \quad \frac{df(\chi)}{d\chi} = 3(1+\mu)\chi^2 - 2(2+\mu)\chi + 1.$$

Dacă se anulează ultima expresie, obținem

$$(5.10'') \quad \chi = \frac{1}{3(1+\mu)} (2 + \mu \pm \sqrt{\mu^2 + \mu + 1}) \leq 1$$

pentru $0 \leq \mu \leq 0,5$. Forma (5.7) a ecuației ne arată că nu se pot lua în considerare decât rădăcini mai mari ca 1; pentru $\chi \geq 1$ avem însă $df(\chi)/d\chi > 0$, deci $f(\chi)$ este o funcție monoton crescătoare. Deoarece $f(1) = -1/8 < 0$ iar $f(\infty) = +\infty > 0$, ecuația (5.7) are o singură soluție convenabilă (mai mare ca 1). Se obține astfel un singur șir de valori proprii.

Pentru $\mu = 1/4$ (valoare medie luată de Rayleigh pentru coeficientul de contracție transversală) ecuația (5.7'') devine

$$(5.11) \quad 4\chi^3 - 7\chi^2 + 3\chi - \frac{3}{8} = 0.$$

Pentru o stare de deformare plană vom avea astfel valoarea

$$(5.12) \quad \chi = \frac{1}{4} (3 + \sqrt{3}) = 1,1830.$$

De aici rezultă viteza de propagare a undelor Rayleigh

$$(5.13) \quad c = \frac{c_2}{1,0877} = 0,9194 c_2$$

și apoi

$$(5.14) \quad \alpha_n = 0,8475 \gamma_n, \quad \beta_n = 0,3933 \gamma_n.$$

Pentru valoarea $\mu = 1/3$ (care este convenabilă pentru diferite metale) se obțin aceleași rezultate pentru o stare de tensiune plană (relația (5.7')).

Atât în cazul unei stări de tensiune plană cât și în cazul unei stări de deformare plană, găsim, pentru valoarea limită $\mu = 0$, ecuația

$$(5.11') \quad \chi^3 - 2\chi^2 + \chi - \frac{1}{8} = 0,$$

de unde rezultă

$$(5.12') \quad \chi = \frac{1}{4} (3 + \sqrt{5}) = 1,3090,$$

viteza de propagare

$$(5.13') \quad c = \frac{c_2}{1,1044} = 0,9055 c_2$$

și

$$(5.14') \quad \alpha_n = 0,7861 \gamma_n, \quad \beta_n = 0,4960 \gamma_n.$$

În cazul unei stări de deformare plană vom avea pentru $\mu = 1/2$ ecuația

$$(5.11'') \quad 2\chi^3 - 3\chi^2 + \chi - \frac{1}{8} = 0,$$

cu rădăcina

$$(5.12'') \quad \chi = 1,0958.$$

Undele Rayleigh se propagă cu viteza

$$(5.13'') \quad c = \frac{c_2}{1,0468} = 0,9553 c_2$$

și vom avea

$$(5.14'') \quad \alpha_n = 0,8785 \gamma_n, \quad \beta_n = 0,2956 \gamma_n.$$

Cu notațiile

$$(5.15) \quad C_n = A_n \bar{C}_n \gamma_n^2, \quad D_n = A_n \bar{D}_n \gamma_n^2,$$

starea de tensiune capătă forma

$$(5.16) \quad \begin{cases} \sigma_x = \sum_n (C_n \sin \omega_n t + D_n \cos \omega_n t) \left[\left(1 + \frac{\mu}{2\chi}\right) e^{-\alpha_n y} - \right. \\ \left. - \left(1 - \frac{1}{2\chi}\right) e^{-\beta_n y} \right] \sin \gamma_n x, \\ \sigma_y = - \left(1 - \frac{1}{2\chi}\right) \sum_n (C_n \sin \omega_n t + D_n \cos \omega_n t) (e^{-\alpha_n y} - \\ - e^{-\beta_n y}) \sin \gamma_n x, \end{cases}$$

$$(5.16') \quad \tau_{xy} = \sqrt{1 - \frac{1-\mu}{2\chi}} \sum_n (C_n \sin \omega_n t + D_n \cos \omega_n t) (e^{-\alpha_n y} - e^{-\beta_n y}) \cos \gamma_n x,$$

iat starea de deformare va fi dată de

$$(5.17) \quad \begin{cases} E[u - (-\omega_0 y + u_0)] = -(1 + \mu) \sum_n \frac{1}{\gamma_n} (C_n \sin \omega_n t + \\ + D_n \cos \omega_n t) \left[e^{-\alpha_n y} - \left(1 - \frac{1}{2\chi}\right) e^{-\beta_n y} \right] \cos \gamma_n x, \\ E(v - \omega_0 x) = \frac{1 + \mu}{\sqrt{1 - \frac{1}{\chi}}} \sum_n \frac{1}{\gamma_n} (C_n \sin \omega_n t + D_n \cos \omega_n t) \times \\ \times \left[\sqrt{\left(1 - \frac{1}{\chi}\right) \left(1 - \frac{1-\mu}{2\chi}\right)} e^{-\alpha_n y} - \left(1 - \frac{1}{2\chi}\right) e^{-\beta_n y} \right] \sin \gamma_n x. \end{cases}$$

Deplasarea u_0 și rotirea ω_0 de corp rigid se determină din condiția suplimentară ca un punct al semiplanului elastic să rămână fix.

Pe linia de separație apare tensiunea normală

$$(5.18) \quad \sigma_x(x, 0; t) = \frac{1 + \mu}{2\chi} \sum_n (C_n \sin \omega_n t + D_n \cos \omega_n t) \cos \gamma_n x;$$

forma deformată a acestei linii este dată de

$$(5.19) \quad \left\{ \begin{aligned} E[u(x, 0; t) - u_0] &= -\frac{1+\mu}{2\chi} \sum_n \frac{1}{\gamma_n} (C_n \sin \omega_n t + \\ &\quad + D_n \cos \omega_n t) \cos \gamma_n x, \\ E[v(x, 0; t) - \omega_0 x] &= (1+\mu) \left(\sqrt{1 - \frac{1-\mu}{2\chi}} - \frac{1 - \frac{1}{2\chi}}{\sqrt{1 - \frac{1}{\chi}}} \right) \times \\ &\quad \times \sum_n \frac{1}{\gamma_n} (C_n \sin \omega_n t + D_n \cos \omega_n t) \sin \gamma_n x. \end{aligned} \right.$$

Dacă în loc de (5.1) se alege o funcție de tensiune în $\cos \gamma_n x$, se ajunge la rezultate analoage și la același șir de valori proprii.

5.2. *Banda elastică.* Fie banda elastică $|y| \leq b$, neîncărcată pe liniile de separație. Pe linia considerațiilor făcute la punctul 4.2, se alege o funcție de tensiune de forma

$$(5.20) \quad F(x, y; t) = \sum_n (\bar{C}_n \sin \omega_n t + \bar{D}_n \cos \omega_n t) (A_n \operatorname{ch} \alpha_n y + B_n \operatorname{sh} \alpha_n y) \sin \gamma_n x.$$

Coeficienții A_n, B_n vor fi precizați de condițiile pe contur

$$(5.21) \quad y = \pm b: \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{yx} = 0;$$

rezultă

$$(5.22) \quad \begin{cases} A_n \operatorname{ch} \alpha_n b + B_n \operatorname{ch} \beta_n b = 0, \\ 4\alpha_n \beta_n \gamma_n^2 A_n \operatorname{sh} \alpha_n b + (\beta_n^2 + \gamma_n^2)^2 B_n \operatorname{ch} \beta_n b = 0. \end{cases}$$

Pentru a avea o soluție netrivială trebuie să fie îndeplinită condiția

$$(5.23) \quad 4\alpha_n \beta_n \gamma_n^2 \operatorname{th} \alpha_n b = (\beta_n^2 + \gamma_n^2)^2 \operatorname{th} \beta_n b.$$

Cu notațiile (5.5), (5.6) se ajunge la expresiile (5.9), iar valorile proprii vor fi date de ecuația transcendentă

$$(5.23') \quad \begin{aligned} 4\chi \sqrt{\chi - 1} \sqrt{\chi - \frac{1-\mu}{2}} \operatorname{th} \left(\gamma_n b \sqrt{1 - \frac{1-\mu}{2\chi}} \right) = \\ = (2\chi - 1)^2 \operatorname{th} \left(\gamma_n b \sqrt{1 - \frac{1}{\chi}} \right). \end{aligned}$$

Cu notațiile

$$(5.24) \quad C_n = A_n \bar{C}_n \gamma_n^2 \operatorname{ch} \alpha_n b, \quad D_n = A_n \bar{D}_n \gamma_n^2 \operatorname{ch} \beta_n b,$$

obținem funcția de tensiune

$$(5.25) \quad F(x, y; t) = \sum_n \frac{1}{\gamma_n^2} (C_n \sin \omega_n t + D_n \cos \omega_n t) \left(\frac{\operatorname{ch} \alpha_n y}{\operatorname{ch} \alpha_n b} - \frac{\operatorname{ch} \beta_n y}{\operatorname{ch} \beta_n b} \right) \sin \gamma_n x,$$

din care se poate căpăta starea de tensiune și starea de deformare.

Poate fi folosită, de asemenea, funcția de tensiune

$$(5.26) \quad F(x, y; t) = \sum_n \frac{1}{\gamma_n^2} (C_n \sin \omega_n t + D_n \cos \omega_n t) \left(\frac{\cos \alpha_n y}{\cos \alpha_n b} - \frac{\cos \beta_n y}{\cos \beta_n b} \right) \sin \gamma_n x,$$

în care caz valorile proprii sînt date de ecuația

$$(5.27) \quad 4 \alpha_n \beta_n \gamma_n^2 \operatorname{tg} \alpha_n b + (\gamma_n^2 - \beta_n^2)^2 \operatorname{tg} \beta_n b = 0.$$

În cazul unei antisimetrii în raport cu axa Ox , găsim un alt șir de valori proprii, precizat de ecuația

$$(5.28) \quad 4 \alpha_n \beta_n \gamma_n^2 \operatorname{cth} \alpha_n b = (\beta_n^2 + \gamma_n^2)^2 \operatorname{cth} \beta_n b$$

sau de ecuația

$$(5.28') \quad 4 \alpha_n \beta_n \gamma_n^2 \operatorname{ctg} \alpha_n b + (\gamma_n^2 - \beta_n^2)^2 \operatorname{ctg} \beta_n b = 0.$$

Funcțiile de tensiune corespunzătoare vor fi

$$(5.29) \quad F(x, y; t) = \sum_n \frac{1}{\gamma_n^2} (C_n \sin \omega_n t + D_n \cos \omega_n t) \left(\frac{\operatorname{sh} \alpha_n y}{\operatorname{sh} \alpha_n b} - \frac{\operatorname{sh} \beta_n y}{\operatorname{sh} \beta_n b} \right) \sin \gamma_n x,$$

respectiv

$$(5.29') \quad F(x, y; t) = \sum_n \frac{1}{\gamma_n^2} (C_n \sin \omega_n t + D_n \cos \omega_n t) \left(\frac{\sin \alpha_n y}{\sin \alpha_n b} - \frac{\sin \beta_n y}{\sin \beta_n b} \right) \sin \gamma_n x.$$

Dacă se alege o funcție de tensiune în $\cos \gamma_n x$, se obțin rezultate analoage, deoarece ecuațiile care dau valorile proprii sînt aceleași.

5.3. *Alte domenii plane.* Studiul vibrațiilor proprii pentru sfertul de plan elastic, semibanda elastică și dreptunghiul elastic poate fi făcut în mod analog cu cel arătat la punctul 4.3.

§ 6. Vibrații spațiale staționare

6.1. *Semispațiul elastic.* Fie dat semispațiul elastic $z \geq 0$, pe al cărui plan de separație acționează sarcina normală $p(x, y; t)$ de forma

$$(6.1) \quad p(x, y; t) = p(x, y) \sin \omega t.$$

Ca și în cazul plan, pentru simplificarea calculului se va considera numai un termen din dezvoltarea în raport cu timpul; în cazul unei serii Fourier sau în cazul unei integrale Fourier în raport cu această variabilă se vor putea suprapune rezultatele corespunzătoare.

Vom alege o sarcină normală periodică în raport cu x și y și antisimetrică în raport cu ambele axe de coordonate

$$(6.2) \quad p(x, y) = \sum_n \sum_m a_{nm} \sin \gamma_n x \sin \delta_m y,$$

de perioadă $L_x = 2a$ și $L_y = 2b$; s-a notat

$$(6.3) \quad \gamma_n = \frac{n\pi}{a}, \quad \delta_m = \frac{m\pi}{b} \quad (n, m = 1, 2, 3, \dots).$$

Cazuri de încărcare cu alte proprietăți de simetrie sau de antisimetrie în raport cu axele de coordonate ca și cazuri de încărcare tangențiale pot fi studiate în mod analog, după cum s-a făcut în cazul static corespunzător [36].

Se alege funcții de tensiune impare în raport cu variabilele x și y și anume

$$(6.4) \quad \begin{cases} F_x(x, y, z; t) = \sin \omega t \sum_n \sum_m (A'_{nm} e^{-\alpha_{nm} z} + B'_{nm} e^{-\beta_{nm} z}) \sin \gamma_n x \sin \delta_m y, \\ F_y(x, y, z; t) = \sin \omega t \sum_n \sum_m (A''_{nm} e^{-\alpha_{nm} z} + B''_{nm} e^{-\beta_{nm} z}) \sin \gamma_n x \sin \delta_m y, \\ F_z(x, y, z; t) = \sin \omega t \sum_n \sum_m (A'''_{nm} e^{-\alpha_{nm} z} + B'''_{nm} e^{-\beta_{nm} z}) \sin \gamma_n x \sin \delta_m y, \end{cases}$$

trebuind să fie verificate relațiile

$$(6.5) \quad \gamma_n^2 + \delta_m^2 = \alpha_{nm}^2 + \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{1-\mu} \frac{\rho}{E} \omega^2 = \beta_{nm}^2 + 2(1+\mu) \frac{\rho}{E} \omega^2.$$

Șirurile de coeficienți A'_{nm} , B'_{nm} , ..., B'''_{nm} vor fi precizate prin condițiile la limită

$$(6.6) \quad z = 0: \sigma_z = p(x, y; t), \quad \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0.$$

Se observă apoi că, prin modul de alegere al funcțiilor de tensiune, componentele stării de tensiune tind către zero pentru $z \rightarrow \infty$ iar funcțiile de cîte două variabile spațiale F_{yz} , F_{zx} , F_{xy} pot fi luate egale cu zero

$$(6.7) \quad F_{yz} = F_{zx} = F_{xy} = 0.$$

Datorită formei funcțiilor de tensiune alese, funcțiile φ_x , φ_y , φ_z au forma (3.7) iar funcțiile f_{yz} , f_{zx} , f_{xy} pot fi luate egale cu zero

$$(6.8) \quad f_{yz} = f_{zx} = f_{xy} = 0.$$

Cu (3.1), (3.1'), tensiunile vor fi

$$(6.9) \quad \left\{ \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\sin \omega t}{2+\mu} \sum_n \sum_m \left\{ A_{nm} \left[\gamma_n^2 + \frac{\mu(1+\mu)}{1-\mu} \frac{\rho}{E} \omega^2 \right] e^{-\alpha_{nm} z} + \right. \\ &\quad + \left\{ B'_{nm} \left[\gamma_n^2 - 2 \frac{1+\mu}{1-\mu} \frac{\rho}{E} \omega^2 \right] + (B''_{nm} + B'''_{nm}) \left[\gamma_n^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\mu(1+\mu)}{1-\mu} \frac{\rho}{E} \omega^2 \right] \right\} e^{-\beta_{nm} z} \right\} \sin \gamma_n x \sin \delta_m y, \\ \sigma_y &= \frac{\sin \omega t}{2+\mu} \sum_n \sum_m \left\{ A_{nm} \left[\delta_m^2 + \frac{\mu(1+\mu)}{1-\mu} \frac{\rho}{E} \omega^2 \right] e^{-\alpha_{nm} z} + \right. \\ &\quad + \left\{ B'_{nm} \left[\delta_m^2 - 2 \frac{1+\mu}{1-\mu} \frac{\rho}{E} \omega^2 \right] + (B''_{nm} + B'''_{nm}) \left[\delta_m^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\mu(1+\mu)}{1-\mu} \frac{\rho}{E} \omega^2 \right] \right\} e^{-\beta_{nm} z} \right\} \sin \gamma_n x \sin \delta_m y, \\ \sigma_z &= \frac{\sin \omega t}{2+\mu} \sum_n \sum_m \left\{ A_{nm} \left[\gamma_n^2 + \delta_m^2 - (1+\mu) \frac{\rho}{E} \omega^2 \right] e^{-\alpha_{nm} z} - \right. \\ &\quad - \left\{ B'''_{nm} \left[\beta_{nm}^2 + 2 \frac{1+\mu}{1-\mu} \frac{\rho}{E} \omega^2 \right] + (B'_{nm} + B''_{nm}) \left[\beta_{nm}^2 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\mu(1+\mu)}{1-\mu} \frac{\rho}{E} \omega^2 \right] \right\} e^{-\beta_{nm} z} \right\} \sin \gamma_n x \sin \delta_m y, \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned}
 \tau_{yz} = & \frac{\sin \omega t}{2 + \mu} \sum_n \sum_m \left\{ \delta_m \alpha_{nm} A_{nm} e^{-\alpha_{nm} z} + \frac{1}{\beta_{nm} \delta_m} \left[\delta_m^2 \beta_{nm}^2 + \right. \right. \\
 & + \frac{1}{2} \frac{\mu(1 + \mu)}{1 - \mu} \frac{\rho}{E} \omega^2 (\beta_{nm}^2 - \delta_m^2) \left. \right] B'_{nm} + \left[\delta_m^2 \beta_{nm}^2 - \right. \\
 & - \frac{1}{2} \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \frac{\rho}{E} \omega^2 (2 \beta_{nm}^2 + \mu \delta_m^2) \left. \right] B''_{nm} + \left[\delta_m^2 \beta_{nm}^2 + \right. \\
 & + \frac{1}{2} \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \frac{\rho}{E} \omega^2 (\mu \beta_{nm}^2 + 2 \delta_m^2) \left. \right] B'''_{nm} \left. \right\} e^{-\beta_{nm} z} \sin \gamma_n x \cos \delta_m y, \\
 \tau_{zx} = & \frac{\sin \omega t}{2 + \mu} \sum_n \sum_m \left\{ \gamma_n \alpha_{nm} A_{nm} e^{-\alpha_{nm} z} + \frac{1}{\beta_{nm} \gamma_n} \left[\gamma_n^2 \beta_{nm}^2 + \right. \right. \\
 & + \frac{1}{2} \frac{\mu(1 + \mu)}{1 - \mu} \frac{\rho}{E} \omega^2 (\beta_{nm}^2 - \gamma_n^2) \left. \right] B''_{nm} + \left[\gamma_n^2 \beta_{nm}^2 - \right. \\
 & - \frac{1}{2} \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \frac{\rho}{E} \omega^2 (2 \beta_{nm}^2 + \mu \gamma_n^2) \left. \right] B'_{nm} + \left[\gamma_n^2 \beta_{nm}^2 + \right. \\
 & + \frac{1}{2} \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \frac{\rho}{E} \omega^2 (\mu \beta_{nm}^2 + 2 \gamma_n^2) \left. \right] B'''_{nm} \left. \right\} e^{-\beta_{nm} z} \cos \gamma_n x \sin \delta_m y, \\
 \tau_{xy} = & - \frac{\sin \omega t}{2 + \mu} \sum_n \sum_m \left\{ \gamma_n \delta_m A_{nm} e^{-\alpha_{nm} z} + \frac{1}{\gamma_n \delta_m} \left[\gamma_n^2 \delta_m^2 + \right. \right. \\
 & + \frac{1}{2} \frac{\mu(1 + \mu)}{1 - \mu} \frac{\rho}{E} \omega^2 (\gamma_n^2 + \delta_m^2) \left. \right] B'''_{nm} + \left[\gamma_n^2 \delta_m^2 + \right. \\
 & + \frac{1}{2} \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \frac{\rho}{E} \omega^2 (\mu \gamma_n^2 - 2 \delta_m^2) \left. \right] B'_{nm} + \left[\gamma_n^2 \delta_m^2 - \right. \\
 & - \frac{1}{2} \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \frac{\rho}{E} \omega^2 (2 \gamma_n^2 - \mu \delta_m^2) \left. \right] B''_{nm} \left. \right\} e^{-\beta_{nm} z} \cos \gamma_n x \cos \delta_m y.
 \end{aligned}
 \tag{6.9'}$$

Aici s-a introdus notația

$$A_{nm} = A'_{nm} + A''_{nm} + A'''_{nm} \tag{6.10}$$

și s-a folosit relația

$$\gamma_n^2 + \delta_m^2 - (1 + \mu) \frac{\rho}{E} \omega^2 = \beta_{nm}^2 + (1 + \mu) \frac{\rho}{E} \omega^2. \tag{6.11}$$

Deplasările vor fi date de

$$\begin{aligned}
 (6.12) \quad \left\{ \begin{aligned}
 & \frac{E}{1+\mu} (u + \omega_z^0 y) = - \frac{\sin \omega t}{2+\mu} \sum_n \sum_m \frac{1}{\gamma_n} \left\{ \gamma_n^2 A_{nm} e^{-\alpha_{nm} z} + \right. \\
 & \quad + \left[\gamma_n^2 - 2 \frac{1+\mu}{1-\mu} \frac{\rho}{E} \omega^2 \right] B'_{nm} + \left(\gamma_n^2 + \right. \\
 & \quad \left. \left. + \mu \frac{1+\mu}{1-\mu} \frac{\rho}{E} \omega^2 \right) (B''_{nm} + B'''_{nm}) \right\} e^{-\beta_{nm} z} \Big\} \cos \gamma_n x \sin \delta_m y, \\
 & \frac{E}{1+\mu} (v - \omega_z^0 x) = - \frac{\sin \omega t}{2+\mu} \sum_n \sum_m \frac{1}{\delta_m} \left\{ \delta_m^2 A_{nm} e^{-\alpha_{nm} z} + \right. \\
 & \quad + \left[\delta_m^2 - 2 \frac{1+\mu}{1-\mu} \frac{\rho}{E} \omega^2 \right] B''_{nm} + \left(\delta_m^2 + \right. \\
 & \quad \left. + \mu \frac{1+\mu}{1-\mu} \frac{\rho}{E} \omega^2 \right) (B'''_{nm} + B'_{nm}) \Big\} e^{-\beta_{nm} z} \Big\} \sin \gamma_n x \cos \delta_m y, \\
 & \frac{E}{1+\mu} w = \frac{\sin \omega t}{2+\mu} \sum_n \sum_m \frac{1}{\beta_{nm}} \left\{ \alpha_{nm} \beta_{nm} A_{nm} e^{-\alpha_{nm} z} + \right. \\
 & \quad + \left[\beta_{nm}^2 + 2 \frac{1+\mu}{1-\mu} \frac{\rho}{E} \omega^2 \right] B'''_{nm} + \left(\beta_{nm}^2 - \right. \\
 & \quad \left. - \mu \frac{1+\mu}{1-\mu} \frac{\rho}{E} \omega^2 \right) (B'_{nm} + B''_{nm}) \Big\} e^{-\beta_{nm} z} \Big\} \sin \gamma_n x \sin \delta_m y.
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Din (6.5) rezultă și relația

$$(6.13) \quad \alpha_{nm}^2 - \beta_{nm}^2 = \frac{1+\mu}{1-\mu} \frac{\rho}{E} \omega^2.$$

În acest caz, căpătăm tensiunile

$$\begin{aligned}
 (6.14) \quad \sigma_z = & - \frac{\sin \omega t}{2+\mu} \sum_n \sum_m \left\{ [(1-\mu) \alpha_{nm}^2 + \mu \beta_{nm}^2] A_{nm} e^{-\alpha_{nm} z} + \right. \\
 & + \{ (2\alpha_{nm}^2 - \beta_{nm}^2) B'''_{nm} - \mu \alpha_{nm}^2 - (1+\mu) \beta_{nm}^2 \} (B'_{nm} + \\
 & \left. + B''_{nm}) \right\} e^{-\beta_{nm} z} \Big\} \sin \gamma_n x \sin \delta_m y,
 \end{aligned}$$

$$(6.14') \quad \left\{ \begin{aligned} \tau_{zx} &= \frac{\sin \omega t}{2 + \mu} \sum_n \sum_m \frac{1}{\beta_{nm} \gamma_n} \left\{ 2\gamma_n^2 \alpha_{nm} \beta_{nm} A_{nm} e^{-\alpha_{nm} z} + \right. \\ &\quad + \{ [2\gamma_n^2 \beta_{nm}^2 - (\alpha_{nm}^2 - \beta_{nm}^2) (2\beta_{nm}^2 + \mu \gamma_n^2)] B'_{nm} + \\ &\quad + [2\gamma_n^2 \beta_{nm}^2 + \mu (\alpha_{nm}^2 - \beta_{nm}^2) (\beta_{nm}^2 - \gamma_n^2)] B''_{nm} + [2\gamma_n^2 \beta_{nm}^2 + \\ &\quad + (\alpha_{nm}^2 - \beta_{nm}^2) (\mu \beta_{nm}^2 + 2\gamma_n^2)] B'''_{nm} \} e^{-\beta_{nm} z} \} \cos \gamma_n x \sin \delta_m y, \\ \tau_{yz} &= \frac{\sin \omega t}{2 + \mu} \sum_n \sum_m \frac{1}{\beta_{nm} \delta_m} \left\{ 2\delta_m^2 \alpha_{nm} \beta_{nm} A_{nm} e^{-\alpha_{nm} z} + \right. \\ &\quad + \{ [2\delta_m^2 \beta_{nm}^2 + \mu (\alpha_{nm}^2 - \beta_{nm}^2) (\beta_{nm}^2 - \delta_m^2)] B'_{nm} + [2\delta_m^2 \beta_{nm}^2 - \\ &\quad - (\alpha_{nm}^2 - \beta_{nm}^2) (2\beta_{nm}^2 + \mu \delta_m^2)] B''_{nm} + [2\delta_m^2 \beta_{nm}^2 + \\ &\quad + (\alpha_{nm}^2 - \beta_{nm}^2) (\mu \beta_{nm}^2 + 2\delta_m^2)] B'''_{nm} \} e^{-\beta_{nm} z} \} \sin \gamma_n x \cos \delta_m y. \end{aligned} \right.$$

Cu condițiile la limită (6.6) se ajunge la sistemul de ecuații algebrice liniare

$$(6.15) \quad \left\{ \begin{aligned} &[(1 - \mu) \alpha_{nm}^2 + \mu \beta_{nm}^2] A_{nm} - [\mu \alpha_{nm}^2 - (1 + \mu) \beta_{nm}^2] (B'_{nm} + B''_{nm}) + \\ &\quad + (2\alpha_{nm}^2 - \beta_{nm}^2) B'''_{nm} = - (2 + \mu) a_{nm}, \\ &2\gamma_n^2 \alpha_{nm} \beta_{nm} A_{nm} + [2\gamma_n^2 \beta_{nm}^2 - (\alpha_{nm}^2 - \beta_{nm}^2) (2\beta_{nm}^2 + \mu \gamma_n^2)] B'_{nm} + \\ &\quad + [2\gamma_n^2 \beta_{nm}^2 + \mu (\alpha_{nm}^2 - \beta_{nm}^2) (\beta_{nm}^2 - \gamma_n^2)] B''_{nm} + \\ &\quad + [2\gamma_n^2 \beta_{nm}^2 + (\alpha_{nm}^2 - \beta_{nm}^2) (\mu \beta_{nm}^2 + 2\gamma_n^2)] B'''_{nm} = 0, \\ &2\delta_m^2 \alpha_{nm} \beta_{nm} A_{nm} + [2\delta_m^2 \beta_{nm}^2 + \mu (\alpha_{nm}^2 - \beta_{nm}^2) (\beta_{nm}^2 - \delta_m^2)] B'_{nm} + \\ &\quad + [2\delta_m^2 \beta_{nm}^2 - (\alpha_{nm}^2 - \beta_{nm}^2) (2\beta_{nm}^2 + \mu \delta_m^2)] B''_{nm} + \\ &\quad + [2\delta_m^2 \beta_{nm}^2 + (\alpha_{nm}^2 - \beta_{nm}^2) (\mu \beta_{nm}^2 + 2\delta_m^2)] B'''_{nm} = 0. \end{aligned} \right.$$

Prin scăderea ultimelor două ecuații din prima ecuație rezultă

$$(6.16) \quad \begin{aligned} &-(\gamma_n^2 + \delta_m^2) [(1 - \mu) \alpha_{nm}^2 - 2\alpha_{nm} \beta_{nm} + \mu \beta_{nm}^2] A_{nm} + \\ &+ \beta_{nm}^2 [\gamma_n^2 + \delta_m^2 - (2 - \mu) (\alpha_{nm}^2 - \beta_{nm}^2) (B'_{nm} + B''_{nm}) + \\ &\quad + \beta_{nm}^2 [\gamma_n^2 + \delta_m^2 + 2\mu (\alpha_{nm}^2 - \beta_{nm}^2)] B'''_{nm} = \\ &= (2 + \mu) (\gamma_n^2 + \delta_m^2) a_{nm}. \end{aligned}$$

Folosind notația

$$(6.17) \quad \gamma_n^2 + \delta_m^2 = 2(1 - \mu) \alpha_{nm}^2 - (1 - 2\mu) \beta_{nm}^2,$$

prima dintre ecuațiile (6.15) și ecuația (6.16) se pot scrie sub forma

$$(6.18) \quad \left\{ \begin{aligned} & [(1 - \mu)\alpha_{nm}^2 + \mu\beta_{nm}^2] A_{nm} + [(1 + \mu)\beta_{nm}^2 - \mu\alpha_{nm}^2] B_{nm} + \\ & + (2 + \mu)(\alpha_{nm}^2 - \beta_{nm}^2) B_{nm}'' = - (2 + \mu) a_{nm}, \\ & - (\gamma_n^2 + \delta_m^2) [(1 - \mu)\alpha_{nm}^2 - 2\alpha_{nm}\beta_{nm} + \mu\beta_{nm}^2] A_{nm} + \\ & + \beta_{nm}^2 [(1 + \mu)\beta_{nm}^2 - \mu\alpha_{nm}^2] B_{nm} + (2 + \mu)\beta_{nm}^2(\alpha_{nm}^2 - \beta_{nm}^2) B_{nm}'' = \\ & = (2 + \mu)(\gamma_n^2 + \delta_m^2) a_{nm}, \end{aligned} \right.$$

cu

$$(6.19) \quad B_{nm} = B_{nm}' + B_{nm}'' + B_{nm}'''.$$

Aceste ecuații conduc la

$$(6.20) \quad A_{nm} = - \frac{2 + \mu}{2} \frac{a_{nm}}{N_{nm}} (\beta_{nm}^2 + \gamma_n^2 + \delta_m^2),$$

unde am notat

$$(6.21) \quad N_{nm} = \frac{1}{4} (\beta_{nm}^2 + \gamma_n^2 + \delta_m^2) - \alpha_{nm}\beta_{nm}(\gamma_n^2 + \delta_m^2).$$

Apoi rezultă și

$$(6.22) \quad B_{nm}'' = - \frac{a_{nm}}{N_{nm}} \frac{\alpha_{nm}\beta_{nm}(\gamma_n^2 + \delta_m^2)}{\alpha_{nm}^2 - \beta_{nm}^2} - \frac{1}{2 + \mu} \frac{(1 + \mu)\beta_{nm}^2 - \mu\alpha_{nm}^2}{\alpha_{nm}^2 - \beta_{nm}^2} B_{nm}.$$

Prin calcule corespunzătoare, găsim și coeficienții

$$(6.22') \quad \left\{ \begin{aligned} B_{nm}' &= - \frac{a_{nm}}{N_{nm}} \frac{\alpha_{nm}\beta_{nm}\gamma_n^2}{\alpha_{nm}^2 - \beta_{nm}^2} + \frac{1}{2 + \mu} \frac{\gamma_n^2 + \mu(\alpha_{nm}^2 - \beta_{nm}^2)}{\alpha_{nm}^2 - \beta_{nm}^2} B_{nm}, \\ B_{nm}'' &= - \frac{a_{nm}}{N_{nm}} \frac{\alpha_{nm}\beta_{nm}\delta_m^2}{\alpha_{nm}^2 - \beta_{nm}^2} + \frac{1}{2 + \mu} \frac{\delta_m^2 + \mu(\alpha_{nm}^2 - \beta_{nm}^2)}{\alpha_{nm}^2 - \beta_{nm}^2} B_{nm}. \end{aligned} \right.$$

Înlocuind în (6.9), (6.9'), B_{nm} se elimină, iar starea de tensiune capătă forma

$$(6.23) \quad \left\{ \begin{aligned} \sigma_x &= - \sin \omega t \sum_n \sum_m \frac{a_{nm}}{N_{nm}} \{ [(1 - \mu)\alpha_{nm}^2 + \mu\beta_{nm}^2] [\gamma_n^2 + \mu(\alpha_{nm}^2 - \beta_{nm}^2)] e^{-\alpha_{nm}z} - \alpha_{nm}\beta_{nm}\gamma_n^2 e^{-\beta_{nm}z} \} \sin \gamma_n x \sin \delta_m y, \\ \sigma_y &= - \sin \omega t \sum_n \sum_m \frac{a_{nm}}{N_{nm}} \{ [(1 - \mu)\alpha_{nm}^2 + \mu\beta_{nm}^2] [\delta_m^2 + \mu(\alpha_{nm}^2 - \beta_{nm}^2)] e^{-\alpha_{nm}z} - \alpha_{nm}\beta_{nm}\delta_m^2 e^{-\beta_{nm}z} \} \sin \gamma_n x \sin \delta_m y, \\ \sigma_z &= \sin \omega t \sum_n \sum_m \frac{a_{nm}}{N_{nm}} \{ [(1 - \mu)\alpha_{nm}^2 + \mu\beta_{nm}^2]^2 e^{-\alpha_{nm}z} - \alpha_{nm}\beta_{nm}(\gamma_n^2 + \delta_m^2) e^{-\beta_{nm}z} \} \sin \gamma_n x \sin \delta_m y, \end{aligned} \right.$$

$$(6.23') \quad \begin{cases} \tau_{yz} = -\sin \omega t \sum_n \sum_m \frac{a_{nm}}{N_{nm}} \alpha_{nm} \delta_m [(1 - \mu) \alpha_{nm}^2 + \mu \beta_{nm}^2] \times \\ \quad \times (e^{-\alpha_{nm} z} - e^{-\beta_{nm} z}) \sin \gamma_n x \cos \delta_m y, \\ \tau_{zx} = \sin \omega t \sum_n \sum_m \frac{a_{nm}}{N_{nm}} \alpha_{nm} \gamma_n [(1 - \mu) \alpha_{nm}^2 + \mu \beta_{nm}^2] \times \\ \quad \times (e^{-\alpha_{nm} z} - e^{-\beta_{nm} z}) \cos \gamma_n x \sin \delta_m y, \\ \tau_{xy} = \sin \omega t \sum_n \sum_m \frac{a_{nm}}{N_{nm}} \gamma_n \delta_m \{ [(1 - \mu) \alpha_{nm}^2 + \\ \quad + \mu \beta_{nm}^2] e^{-\alpha_{nm} z} - \alpha_{nm} \beta_{nm} e^{-\beta_{nm} z} \} \cos \gamma_n x \cos \delta_m y. \end{cases}$$

Starea de deformare va fi dată de

$$(6.24) \quad \begin{cases} \frac{E}{1 + \mu} (u + \omega_z^0 y) = \sin \omega t \sum_n \sum_m \frac{a_{nm}}{N_{nm}} \gamma_n \{ [(1 - \mu) \alpha_{nm}^2 + \\ \quad + \mu \beta_{nm}^2] e^{-\alpha_{nm} z} - \alpha_{nm} \beta_{nm} e^{-\beta_{nm} z} \} \cos \gamma_n x \sin \delta_m y, \\ \frac{E}{1 + \mu} (v - \omega_x^0 x) = \sin \omega t \sum_n \sum_m \frac{a_{nm}}{N_{nm}} \delta_m \{ [(1 - \mu) \alpha_{nm}^2 + \\ \quad + \mu \beta_{nm}^2] e^{-\alpha_{nm} z} - \alpha_{nm} \beta_{nm} e^{-\beta_{nm} z} \} \sin \gamma_n x \cos \delta_m y, \\ \frac{E}{1 + \mu} w = -\sin \omega t \sum_n \sum_m \frac{a_{nm}}{N_{nm}} \alpha_{nm} \{ [(1 - \mu) \alpha_{nm}^2 + \\ \quad + \mu \beta_{nm}^2] e^{-\alpha_{nm} z} - (\gamma_n^2 + \delta_m^2) e^{-\beta_{nm} z} \} \sin \gamma_n x \sin \delta_m y, \end{cases}$$

unde, din motive de simetrie, mai trebuie determinată numai rotirea ω_z^0 de corp rigid.

Forma deformată a planului de separație se exprimă prin

$$(6.25) \quad W(x, y, 0; t) = (1 + \mu)^2 \frac{\rho}{E} \omega^2 \sin \omega t \sum_n \sum_m \frac{a_{nm}}{N_{nm}} \alpha_{nm} \sin \gamma_n x \sin \delta_m y.$$

Seriile ce se folosesc sînt uniform convergente, iar seria (6.25) converge rapid.

În cazul unei sarcini locale se pot folosi integrale Fourier în raport cu variabilele x și y , ca și în cazul static [40], [43].

6.2. *Alte domenii spațiale.* În mod analog, pot fi studiate și alte domenii tridimensionale, care sînt mărginite de plane paralele cu planele de coordonate, după cum s-a făcut în cazul static [44].

În cazul stratului elastic $|z| \leq c$, acționat pe planele $z = \pm c$ de o sarcină normală periodică de forma (6.1), (6.2), (6.3), simetrică în raport cu planul $z = 0$, se introduc funcțiile de tensiune.

$$(6.26) \quad \begin{cases} F_x(x, y, z; t) = \sin \omega t \sum_n \sum_m (A'_{nm} \operatorname{ch} \alpha_{nm} z + B'_{nm} \operatorname{ch} \beta_{nm} z) \sin \gamma_n x \sin \delta_m y, \\ F_y(x, y, z; t) = \sin \omega t \sum_n \sum_m (A''_{nm} \operatorname{ch} \alpha_{nm} z + B''_{nm} \operatorname{ch} \beta_{nm} z) \sin \gamma_n x \sin \delta_m y, \\ F_z(x, y, z; t) = \sin \omega t \sum_n \sum_m (A'''_{nm} \operatorname{ch} \alpha_{nm} z + B'''_{nm} \operatorname{ch} \beta_{nm} z) \sin \gamma_n x \sin \delta_m y, \end{cases}$$

unde parametrii α_{nm} , β_{nm} sînt legați prin relațiile (6.5). Funcțiile F_{yz} , F_{zx} , F_{xy} , f_{yz} , f_{zx} , f_{xy} se iau egale cu zero.

Șirul de coeficienți A'_{nm} , B'_{nm} , ..., B''_{nm} se precizează prin condițiile la limită

$$(6.27) \quad z = \pm c: \sigma_z = p(x, y; t), \quad \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0,$$

iar starea de tensiune și starea de deformare sînt date, de asemenea, de unele serii uniform convergente, ca și în cazul static [41], [42].

În cazul sfertului de spațiu elastic $x \geq 0$, $z \geq 0$ vom admite că numai pe planul $z = 0$ acționează o sarcină locală normală de forma (6.1), unde

$$(6.28) \quad p(x, y) = \int_0^\infty \int_0^\infty b(\alpha, \beta) \cos \alpha x \cos \beta y \, d\alpha d\beta,$$

cu

$$(6.29) \quad b(\alpha, \beta) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty p(\xi, \eta) \cos \alpha \xi \cos \beta \eta \, d\xi d\eta.$$

Se folosesc funcții de tensiune de forma

$$(6.30) \quad \begin{aligned} F_x(x, y, z; t) = & \sin \omega t \int_0^\infty \int_0^\infty (A'_1 e^{-\nu_1 z} + A'_2 e^{-\nu_2 z}) \cos \alpha x \cos \beta y \, d\alpha d\beta + \\ & + \sin \omega t \int_0^\infty \int_0^\infty (B'_1 e^{-\lambda_1 x} + B'_2 e^{-\lambda_2 x}) \cos \beta y \cos \gamma z \, d\beta d\gamma, \end{aligned}$$

unde sînt valabile relațiile

$$(6.31) \quad \begin{cases} \beta^2 + \gamma^2 = \lambda_1^2 + \frac{1}{c_1^2} \omega^2 = \lambda^2 + \frac{1}{c_2^2} \omega^2, \\ \alpha^2 + \beta^2 = \nu_1^2 + \frac{1}{c_1^2} \omega^2 = \nu_2^2 + \frac{1}{c_2^2} \omega^2. \end{cases}$$

Funcțiile $A'_1(\alpha, \beta)$, $A'_2(\alpha, \beta)$, ..., $B'_2(\beta, \gamma)$ sînt precizate de condițiile pe contur

$$(6.32) \quad \begin{cases} x = 0: & \sigma_x = 0, & \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0, \\ z = 0: & \sigma_z = p(x, y; t) & \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0. \end{cases}$$

Ca și în cazul static [57], [58], problema se reduce la integrarea unui sistem de două ecuații integrale de tip Fredholm de speța a doua.

În cazul optimii de spațiu elastic $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, supusă acțiunii unei încărcări normale de forma (6.1), (6.2), (6.3) pe planul $z = 0$, se introduc funcții de tensiune de forma

$$\begin{aligned} F_x(x, y, z; t) = & \sin \omega t \int_0^\infty \int_\alpha^\infty (A'_1 e^{-\lambda_1 x} + A'_2 e^{-\lambda_2 x}) \cos \beta y \cos \gamma z \, d\beta d\gamma + \\ (6.33) \quad & + \sin \omega t \int_0^\infty \int_0^\infty (B'_1 e^{-\kappa_1 y} + \beta'_2 e^{-\kappa_2 y}) \cos \gamma z \cos \alpha x \, d\gamma d\alpha + \\ & + \sin \omega t \int_0^\infty \int_0^\infty (C'_1 e^{-\nu_1 z} + C'_2 e^{-\nu_2 z}) \cos \alpha x \cos \beta y \, d\alpha d\beta, \end{aligned}$$

cu relațiile de condiție (6.31) și cu

$$(6.31') \quad \gamma^2 + \alpha^2 = \kappa_1^2 + \frac{1}{c_1^2} \omega^2 = \kappa_2^2 + \frac{1}{c_2^2} \omega^2.$$

Funcțiile $A'_1(\beta, \gamma)$, $A'_2(\beta, \gamma)$, ..., $C'_2''(\alpha, \beta)$ vor fi precizate prin condițiile pe contur

$$(6.34) \quad \begin{cases} x = 0: & \sigma_x = 0 & \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0, \\ y = 0: & \sigma_y = 0, & \tau_{yz} = \tau_{yx} = 0, \\ z = 0: & \sigma_z = p(x, y; t) & \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0, \end{cases}$$

problema reducându-se astfel la integrarea unui sistem de trei ecuații integrale de tip Fredholm de speța a doua, ca și în cazul static [57], [58].

Pentru semistratul elastic și pentru sfertul de strat elastic se introduc funcții de tensiune formate din sume între serii Fourier pe una din direcții (cea normală la planele paralele) și integrale Fourier după celelalte două direcții.

Pentru banda elastică $|y| \leq b$, $|z| \leq c$, supusă la sarcină normală de forma (6.1) pe planele de separație $z = \pm c$, cu

$$(6.35) \quad p(x, y) = \sum_l \sum_m a_{lm} \sin \alpha_l x \sin \beta_m y,$$

se folosesc funcții de tensiune de forma

$$\begin{aligned} F_x(x, y, z; t) = & \sin \omega t \sum_n \sum_l (B'_{1nl} \operatorname{sh} \mu_{1nl} y + B'_{2nl} \operatorname{sh} \mu_{2nl} y) \sin \gamma_n z \sin \alpha_l x + \\ (6.36) \quad & + \sin \omega t \sum_l \sum_m (C'_{1lm} \operatorname{sh} \nu_{1lm} z + C'_{2lm} \operatorname{sh} \nu_{2lm} z) \sin \alpha_l x \sin \beta_m y, \end{aligned}$$

cu relațiile de condiție

$$(6.37) \quad \begin{cases} \gamma_n^2 + \alpha_l^2 = \mu_{1nl}^2 + \frac{1}{c_1^2} \omega^2 = \mu_{2nl}^2 + \frac{1}{c_2^2} \omega^2, \\ \alpha_l^2 + \beta_m^2 = \nu_{1lm}^2 + \frac{1}{c_1^2} \omega^2 = \nu_{2lm}^2 + \frac{1}{c_2^2} \omega^2. \end{cases}$$

Șirurile de coeficienți B'_{1nl} , B'_{2nl} , ..., C'_{2lm} vor fi date de condițiile la limită

$$(6.38) \quad \begin{cases} y = \pm b: & \sigma_y = 0, & \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0, \\ z = \pm c: & \sigma_z = p(x, y; t), & \tau_{zx} = \tau_{xz} = 0, \end{cases}$$

iar problema se reduce la rezolvarea unui sistem infinit de ecuații algebrice liniare, ca și în cazul static [50].

În cazul semibenziilor elastice se folosesc, de asemenea, funcții de tensiune construite cu ajutorul seriilor și integralelor Fourier.

Fie acum paralelipipedul elastic $|x| \leq a, |y| \leq b, |z| \leq c$, supus acțiunii unei încărcări normale de forma (6.1), (6.2), (6.3) pe planele $z = \pm c$. Se introduc funcții de tensiune de forma

$$(6.39) \quad \begin{aligned} F_x(x, y, z; t) = & \sin \omega t \sum_n \sum_m (A'_{1mn} \operatorname{sh} \lambda_{1mn} x + A'_{2mn} \operatorname{sh} \lambda_{2mn} x) \sin \beta_m y \sin \gamma_n z + \\ & + \sin \omega t \sum_n \sum_l (B'_{1nl} \operatorname{sh} \mu_{1nl} y + B'_{2nl} \operatorname{sh} \mu_{2nl} y) \sin \gamma_n z \sin \alpha_l x + \\ & + \sin \omega t \sum_l \sum_m (C'_{1lm} \operatorname{sh} \nu_{1lm} z + C'_{2lm} \operatorname{sh} \nu_{2lm} z) \sin \alpha_l x \sin \beta_m y, \end{aligned}$$

unde sînt valabile relațiile (6.37) și relațiile

$$(6.37') \quad \beta_m^2 + \gamma_n^2 = \lambda_{1mn}^2 + \frac{1}{c_1^2} \omega^2 = \lambda_{2mn}^2 + \frac{1}{c_2^2} \omega^2.$$

Șirurile de coeficienți $A'_{1mn}, A'_{2mn}, \dots, C'_{2lm}$ se precizează cu ajutorul condițiilor pe contur

$$(6.40) \quad \begin{cases} x = \pm a: & \sigma_x = 0, & \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0, \\ y = \pm b: & \sigma_y = 0, & \tau_{yz} = \tau_{yx} = 0, \\ z = \pm c: & \sigma_z = p(x, y; t), & \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0, \end{cases}$$

problema reducîndu-se astfel la rezolvarea unui sistem de ecuații algebrice liniare, ca și în cazul static corespunzător [50].

7. VIBRAȚII SPAȚIALE PROPRII

7.1. Semispațiul elastic. Undele Rayleigh. Fie dat semispațiul elastic $z \geq 0$, fără sarcină exterioară acționînd pe planul de separație. Ca și la studiul făcut la punctul 6.1, se aleg funcții de tensiune de forma

$$(7.1) \quad \begin{aligned} F_x(x, y, z; t) = & \sum_n \sum_m (\bar{C}_{nm} \sin \omega_{nm} t + \bar{D}_{nm} \cos \omega_{nm} t) \times \\ & \times (A'_{nm} e^{-\alpha_{nm} z} + B'_{nm} e^{-\alpha_{nm} z}) \sin \gamma_n x \sin \delta_m, \end{aligned}$$

cu condițiile

$$(7.2) \quad \gamma_n^2 + \delta_m^2 = \alpha_{nm}^2 + \frac{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}{1 - \mu} \frac{\rho}{E} \omega_{nm}^2 = \beta_{nm}^2 + 2(1 + \mu) \frac{\rho}{E} \omega_{nm}^2.$$

Componentele tensorului tensiune se anulează pentru $z \rightarrow \infty$, iar coeficienții $A'_{nm}, B'_{nm}, \dots, B''_{nm}$ sînt precizați prin condițiile la limită

$$(7.3) \quad z = 0: \sigma_z = 0, \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0.$$

Se ajunge astfel la relațiile

$$(7.4) \left\{ \begin{aligned} & [(1 - \mu) \alpha_{nm}^2 + \mu \beta_{nm}^2] A_{nm} - [\mu \alpha_{nm}^2 - (1 + \mu) \beta_{nm}^2] (B_{nm}^2 + B_{nm}'') + \\ & \quad + (2\alpha_{nm}^2 - \beta_{nm}^2) B_{nm}''' = 0, \\ & 2\gamma_n^2 \alpha_{nm} \beta_{nm} A_{nm} + [2\gamma_n^2 \beta_{nm}^2 - (\alpha_{nm}^2 - \beta_{nm}^2) (2\beta_{nm}^2 + \mu \gamma_n^2)] B_{nm}' + \\ & \quad + [2\gamma_n^2 \beta_{nm}^2 + \mu (\alpha_{nm}^2 - \beta_{nm}^2) (\beta_{nm}^2 - \gamma_n^2)] B_{nm}'' + \\ & \quad + [2\gamma_n^2 \beta_{nm}^2 + (\alpha_{nm}^2 - \beta_{nm}^2) (\mu \beta_{nm}^2 + 2\gamma_n^2)] B_{nm}''' = 0, \\ & 2\delta_m^2 \alpha_{nm} \beta_{nm} A_{nm} + [2\delta_m^2 \beta_{nm}^2 + \mu (\alpha_{nm}^2 - \beta_{nm}^2) (\beta_{nm}^2 - \delta_m^2)] B_{nm}' + \\ & \quad + [2\delta_m^2 \beta_{nm}^2 - (\alpha_{nm}^2 - \beta_{nm}^2) (2\beta_{nm}^2 + \mu \delta_m^2)] B_{nm}'' + \\ & \quad + [2\delta_m^2 \beta_{nm}^2 + (\alpha_{nm}^2 - \beta_{nm}^2) (\mu \beta_{nm}^2 + 2\delta_m^2)] B_{nm}''' = 0. \end{aligned} \right.$$

Pentru a găsi o soluție nebanală, trebuie îndeplinită condiția

$$(7.5) \quad 4N_{nm} = (\beta_{nm}^2 + \gamma_n^2 + \delta_m^2)^2 - 4\alpha_{nm} \beta_{nm} (\gamma_n^2 + \delta_m^2) = 0.$$

Cu viteza de propagare a undelor

$$(7.6) \quad c = \frac{\omega_{nm}}{\sqrt{\gamma_n^2 + \delta_m^2}}$$

și cu raportul adimensional (5.6), rezultă

$$(7.7) \quad \alpha_{nm} = \sqrt{1 - \frac{1 - 2\mu}{2(1 - \mu)} \chi} \sqrt{\gamma_n^2 + \delta_m^2}, \quad \beta_{nm} = \sqrt{1 - \frac{1}{\chi}} \sqrt{\gamma_n^2 + \delta_m^2}.$$

Pe această cale, condiția (7.5) ne conduce la ecuația

$$(7.8) \quad 4\chi \sqrt{\chi - 1} \sqrt{\chi - \frac{1 - 2\mu}{2(1 - \mu)}} = (2\chi - 1)^2,$$

care, ridicată la patrat, iar forma (5.7'''). Se găsește astfel pentru șirul de valori proprii aceiași ecuație ca și în cazul unei stări de deformare plană.

Deoarece

$$(7.9) \quad \frac{a_{nm}}{N_{nm}} = - \frac{2}{2 + \mu} \frac{A_{nm}}{\beta_{nm}^2 + \gamma_n^2 + \delta_m^2}$$

și introducând notațiile

$$(7.10) \quad \left\{ \begin{aligned} C_{nm} &= - \frac{1}{2 + \mu} A_{nm} \bar{C}_{nm} (\gamma_n^2 + \delta_m^2), \\ D_{nm} &= - \frac{1}{2 + \mu} A_{nm} \bar{D}_{nm} (\gamma_n^2 + \delta_m^2), \end{aligned} \right.$$

relațiile (6.23), (6.23') ne permit să scriem starea de tensiune sub forma

$$(7.11) \left\{ \begin{aligned} \sigma_x &= - \sum_n \sum_m (C_{nm} \sin \omega_{nm} t + D_{nm} \cos \omega_{nm} t) \left\{ \frac{\gamma_n^2}{\gamma_n^2 + \delta_m^2} \left[e^{-\alpha_{nm} z} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(1 - \frac{1}{2\chi}\right) e^{-\beta_{nm} z} \right] + \frac{\mu}{2(1-\mu)\chi} e^{-\alpha_{nm} z} \right\} \sin \gamma_n x \sin \delta_m y, \\ \sigma_y &= - \sum_n \sum_m (C_{nm} \sin \omega_{nm} t + D_{nm} \cos \omega_{nm} t) \left\{ \frac{\delta_m^2}{\gamma_n^2 + \delta_m^2} \left[e^{-\alpha_{nm} z} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(1 - \frac{1}{2\chi}\right) e^{-\beta_{nm} z} \right] + \frac{\mu}{2(1-\mu)\chi} e^{-\beta_{nm} z} \right\} \sin \gamma_n x \sin \delta_m y, \\ \sigma_z &= \left(1 - \frac{1}{2\chi}\right) \sum_n \sum_m (C_{nm} \sin \omega_{nm} t + D_{nm} \cos \omega_{nm} t) (e^{-\alpha_{nm} z} - \\ &\quad - e^{-\beta_{nm} z}) \sin \gamma_n x \sin \delta_m y, \end{aligned} \right.$$

$$(7.11') \left\{ \begin{aligned} \tau_{yz} &= - \sum_n \sum_m (C_{nm} \sin \omega_{nm} t + D_{nm} \cos \omega_{nm} t) \frac{\alpha_{nm} \delta_m}{\gamma_n^2 + \delta_m^2} \times \\ &\quad \times (e^{-\alpha_{nm} z} - e^{-\beta_{nm} z}) \sin \gamma_n x \cos \delta_m y, \\ \tau_{zx} &= - \sum_n \sum_m (C_{nm} \sin \omega_{nm} t + D_{nm} \cos \omega_{nm} t) \frac{\alpha_{nm} \gamma_n}{\gamma_n^2 + \delta_m^2} \times \\ &\quad \times (e^{-\alpha_{nm} z} - e^{-\beta_{nm} z}) \cos \gamma_n x \sin \delta_m y, \\ \tau_{xy} &= \sum_n \sum_m (C_{nm} \sin \omega_{nm} t + D_{nm} \cos \omega_{nm} t) \frac{\gamma_n \delta_n}{\gamma_n^2 + \delta_m^2} \times \\ &\quad \times \left[e^{-\alpha_{nm} z} - \left(1 - \frac{1}{2\chi}\right) e^{-\beta_{nm} z} \right] \cos \gamma_n x \cos \delta_m y; \end{aligned} \right.$$

starea de deformare va fi dată de

$$(7.12) \left\{ \begin{aligned} \frac{E}{1+\mu} (u + \omega_z^0 y) &= \sum_n \sum_m (C_{nm} \sin \omega_{nm} t + D_{nm} \cos \omega_{nm} t) \frac{\gamma_n}{\gamma_n^2 + \delta_m^2} \times \\ &\quad \times \left[e^{-\alpha_{nm} z} - \left(1 - \frac{1}{2\chi}\right) e^{-\beta_{nm} z} \right] \cos \gamma_n x \sin \delta_m y, \\ \frac{E}{1+\mu} (v - \omega_x^0 x) &= \sum_n \sum_m (C_{nm} \sin \omega_{nm} t + D_{nm} \cos \omega_{nm} t) \frac{\delta_m}{\gamma_n^2 + \delta_m^2} \times \\ &\quad \times \left[e^{-\alpha_{nm} z} \left(1 - \frac{2}{1\chi}\right) e^{-\beta_{nm} z} \right] \sin \gamma_n x \cos \delta_m y, \\ \frac{E}{1+\mu} w &= - \sum_n \sum_m (C_{nm} \sin \omega_{nm} t + D_{nm} \cos \omega_{nm} t) \frac{\alpha_{nm}}{\delta_m^2 + \delta_m^2} \times \\ &\quad \times \left(e^{-\alpha_{nm} z} - \frac{2\chi}{2\chi-1} \right) \sin \gamma_n x \sin \delta_m y, \end{aligned} \right.$$



rotirea ω_z^0 de corp rigid fiind precizată prin condiția suplimentară de existență a unui punct fix în semispațiul elastic considerat.

Pe planul de separație apar tensiunile normale

$$(7.13) \quad \left\{ \begin{aligned} \sigma_x(x, y, 0; t) &= -\frac{1}{2\chi} \sum_n \sum_m (C_{nm} \sin \omega_{nm} t + D_{nm} \cos \omega_{nm} t) \times \\ &\quad \times \left(\frac{\mu}{1-\mu} + \frac{\gamma_n^2}{\gamma_n^2 + \delta_m^2} \right) \sin \gamma_n x \sin \delta_m y, \\ \sigma_y(x, y, 0; t) &= -\frac{1}{2\chi} \sum_n \sum_m (C_{nm} \sin \omega_{nm} t + D_{nm} \cos \omega_{nm} t) \times \\ &\quad \times \left(\frac{\mu}{1-\mu} + \frac{\delta_m^2}{\gamma_n^2 + \delta_m^2} \right) \sin \gamma_n x \sin \delta_m y \end{aligned} \right.$$

și tensiunea tangențială

$$(7.13') \quad \left\{ \begin{aligned} \tau_{xy}(x, y, 0; t) &= \frac{1}{2\chi} \sum_n \sum_m (C_{nm} \sin \omega_{nm} t + D_{nm} \cos \omega_{nm} t) \times \\ &\quad \times \frac{\gamma_n \delta_m}{\gamma_n^2 + \delta_m^2} \cos \gamma_n x \cos \delta_m y. \end{aligned} \right.$$

Putem scrie și deplasările

$$(7.14) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{E}{1+\mu} (u + \omega_z^0 y) &= \frac{1}{2\chi} \sum_n \sum_m (C_{nm} \sin \omega_{nm} t + D_{nm} \cos \omega_{nm} t) \times \\ &\quad \times \frac{\gamma_n}{\gamma_n^2 + \delta_m^2} \cos \gamma_n x \sin \delta_m y, \\ \frac{E}{1+\mu} (v - \omega_z^0 x) &= \frac{1}{2\chi} \sum_n \sum_m (C_{nm} \sin \omega_{nm} t + D_{nm} \cos \omega_{nm} t) \times \\ &\quad \times \frac{\delta_m}{\gamma_n^2 + \delta_m^2} \sin \gamma_n x \cos \delta_m y, \end{aligned} \right.$$

forma deformată a acestui plan fiind dată de

$$(7.15) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{E}{1+\mu} w &= \frac{1}{2\chi-1} \sum_n \sum_m (C_{nm} \sin \omega_{nm} t + D_{nm} \cos \omega_{nm} t) \times \\ &\quad \times \frac{\alpha_{nm}}{\gamma_n^2 + \delta_m^2} \sin \gamma_n x \sin \delta_m y. \end{aligned} \right.$$

Prin alegerea funcțiilor de tensiune (7.1) în $\cos \gamma_n x$ sau în $\cos \delta_m y$ se ajunge la rezultate analoage și la același șir de valori proprii.

Pe această cale se obține o stare de tensiune și o stare de deformare, corespunzătoare undelor de tip Rayleigh, care generalizează rezultatele clasice prezentate la punctul 5.1.

7.2. *Alte domenii spațiale.* Studiul vibrațiilor proprii în cazul stratului elastic, semistratului elastic sau sfertului de strat elastic, sfertului de spațiu elastic sau optimii de spațiu elastic, benzii elastice sau semibenzii elastice, ca și în cazul paralelipipedului elastic se poate face pe o cale analoagă cu cea indicată la punctul 6.2.

§ 8. Probleme speciale.

8.1. *Domenii oarecare.* Problemele sînt mult mai dificile pentru medii elastice cuprinse în domenii de formă oarecare. În acest caz este indicat să se introducă coordonatele curbilinii astfel alese încît frontiera domeniului considerat să fie alcătuită din linii de coordonate sau din suprafețe de coordonate. În acest caz una dintre coordonate devine constantă pe contur și se pot folosi dezvoltări analoage. De exemplu, în cazul plan se pot folosi formule analoage cu cele introduse în [54], [55], pentru cazul static.

8.2. *Vibrații amortizate.* La apariția unei forțe de amortizare se pot face considerații asemănătoare. Este interesant cazul unei forțe de amortizare proporțională cu viteza, caz considerat de B. Golitsin [9] aici se înlocuiește operatorul $\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ prin operatorul $\left(\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nu \frac{\partial}{\partial t} \right)$, unde ν este un coeficient de vîscozitate. Calculele se pot face pe aceeași cale.

De exemplu, în cazul plan starea de tensiune va fi dată de [31]

$$(8.1) \quad \begin{cases} \sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{1+\mu}{E} \left(\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nu \frac{\partial}{\partial t} \right) F, \\ \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{1+\mu}{E} \left(\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nu \frac{\partial}{\partial t} \right) F, \end{cases}$$

$$(8.1') \quad \begin{aligned} \tau_{xy} = & -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{1}{E} \iint \left(\rho \frac{\partial}{\partial t^2} + \nu \frac{\partial}{\partial t} \right) \square_1 F \, dx dy + \\ & + \frac{1}{E} \left(\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nu \frac{\partial}{\partial t} \right) [f_1(y; t) + f_2(x; t)], \end{aligned}$$

iar starea de deformare de

$$(8.2) \quad \begin{cases} Eu = \int \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \, dx - \mu \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{1-\mu^2}{E} \int \left(\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nu \frac{\partial}{\partial t} \right) F \, dx + \frac{\partial f_1(y; t)}{\partial y}, \\ Ev = \int \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \, dy - \mu \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{1-\mu^2}{E} \int \left(\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nu \frac{\partial}{\partial t} \right) F \, dy + \frac{\partial f_2(x; t)}{\partial x}, \end{cases}$$

unde s-au introdus operatorii

$$(8.3) \quad \square_1 = \Delta - \frac{1-\mu^2}{E} \left(\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nu \frac{\partial}{\partial t} \right), \quad \square_2 = \Delta - \frac{2(1+\mu)}{E} \left(\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nu \frac{\partial}{\partial t} \right).$$

Funcția de tensiune verifică dubla ecuație a undelor amortizate

$$(8.4) \quad \square_1 \square_2 F(x, y; t) = 0$$

iar funcțiile $f_1(y; t)$, $f_2(x; t)$ sînt date de ecuația cu variabile spațiale separate

$$(8.5) \quad \begin{aligned} & \int \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} dx + \int \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} dy + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} - \frac{1 - \mu^2}{E} \left(\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nu \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\int \frac{\partial F}{\partial x} dy + \int \frac{\partial F}{\partial y} dx \right) - \\ & - \frac{2(1 + \mu)}{E} \iint \left(\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nu \frac{\partial}{\partial t} \right) \square_1 F dx dy + \\ & + \frac{\partial^2 f_1(y; t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_2(x; t)}{\partial x^2} - \frac{2(1 + \mu)}{E} \left(\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nu \frac{\partial}{\partial t} \right) [f_1(y; t) + f_2(x; t)] = 0. \end{aligned}$$

8.3. *Influența forțelor masice.* Apariția forțelor masice în ecuațiile de mișcare și de continuitate face necesară introducerea unor integrale particulare.

Astfel, în cazul plan, pot fi considerate forțe masice de forma

$$(8.6) \quad \begin{cases} X(x, y; t) = \sin \omega t X(x, y), \\ Y(x, y; t) = \sin \omega t Y(x, y) \end{cases}$$

care conduc la rezultate analoage cu cele din cazul static [33], [53].

Dacă se dau pentru $X(x, y)$, $Y(x, y)$ reprezentări sub forma de serii Fourier sau integrale Fourier, se pot obține cu ușurință integralele particulare corespunzătoare, sub aceeași formă, putîndu-se pune condiții convenționale pe conturul domeniului considerat. În felul acesta se reduce problema cu forțe masice la o problemă fără forțe masice, dar cu condiții la limită modificate, ca și în cazul static [53].

8.4. *Alte influențe* În cazul influenței unei variații de temperatură se modifică modul de a pune problema, acesta luînd diferite aspecte, după cum sîntem în cazul cuplat sau în cazul necuplat. Pentru cazul necuplat se pot folosi metode de calcul analoage cu cele din cazul staționar [42], calculînd astfel undele termoelastice corespunzătoare.

În același fel se pot preciza undele magnetoelastice în cazul existenței unui cîmp electromagnetic.

§ 9. Corpuri anizotrope și neomogene

9.1. *Corpuri anizotrope.* Metodele de calcul expuse pînă în prezent pot fi extinse cu ușurință și asupra corpurilor anizotrope, obținîndu-se rezultate asemănătoare, care — totuși — sînt diferite calitativ de primele, deoarece nu mai este posibilă descompunerea în unde primare și unde secundare.

Pentru cazul general de anizotropie poate fi folosită legea lui Hooke sub forma dată în [37]. Ne vom limita, în cele ce urmează, la cazul plan pentru corpuri ortotrope.

Din punctul de vedere matematic, problema plană a elastodinamicii corespunde integrării sistemului de ecuații al micilor mișcări

$$(9.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \end{cases}$$

La acest sistem de ecuații se adaug legea lui Hooke pentru cazul corpurilor ortotrope supuse la o stare de tensiune plană, sub forma [38], [39]

$$(9.2) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E_x} \sigma_x - \frac{\mu_{xy}}{E_y} \sigma_y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\mu_{yx}}{E_x} \sigma_x + \frac{1}{E_y} \sigma_y,$$

$$(9.2') \quad G_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \tau_{xy},$$

unde E_x , E_y sînt moduli de elasticitate longitudinală, G_{xy} este modulul de elasticitate transversală, iar $\mu_{xy} \neq \mu_{yx}$ sînt constantele elastice de tip Poisson. Între aceste constante de elasticitate are loc relația

$$(9.3) \quad \frac{\mu_{xy}}{E_y} = \frac{\mu_{yx}}{E_x}.$$

În cazul unei stări de deformare plană se introduc constantele elastice generalizate

$$(9.4) \quad E_x^0 = \frac{E_x}{1 - \mu_{xz} \mu_{zx}}, \quad E_y^0 = \frac{E_y}{1 - \mu_{yz} \mu_{zy}},$$

$$(9.4') \quad \mu_{xy}^0 = \frac{\mu_{xy} + \mu_{xz} \mu_{zy}}{1 - \mu_{yz} \mu_{zy}}, \quad \mu_{yx}^0 = \frac{\mu_{yx} + \mu_{yz} \mu_{zy}}{1 - \mu_{xz} \mu_{zx}},$$

unde $\mu_{xz} \neq \mu_{zx}$, $\neq \mu_{yx} \mu_{xy}$ sînt tot constante elastice de tip Poisson.

Se va arăta întii cum se poate formula problema în deplasări, cu ajutorul unei singure funcții de deplasare, sub forma dată de K. Marguerre [15] și de noi [38] pentru cazul static izotrop și ortotrop și de L. Sobrero [26] pentru cazul dinamic izotrop.

Dacă se elimină tensiunile între ecuațiile (9.1), (9.2), (9.2'), se găsesc ecuațiile pe care trebuie să le verifice vectorul deplasare și anume

$$(9.5) \quad \begin{cases} \frac{E_x}{1 - \mu_{xy} \mu_{yx}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu_{xy} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + G_{xy} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ G_{xy} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \frac{E_y}{1 - \mu_{xy} \mu_{yx}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu_{yx} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \end{cases}$$

Deoarece operatorii diferențiali care se aplică funcțiilor u și v sînt primi între ei, deplasările se pot exprima cu ajutorul unei singure funcții de tensiune $\mathfrak{F}(x, y; t)$ sub forma

$$(9.6) \quad \begin{cases} u = - \left(\frac{E_x \mu_{xy}}{1 - \mu_{xy} \mu_{yx}} + G_{xy} \right) \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial x \partial y}, \\ v = \frac{E_x}{1 - \mu_{xy} \mu_{yx}} \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial x^2} + G_{xy} \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial y^2} - \rho \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial t^2} \end{cases}$$

sau sub forma

$$(9.6') \quad \begin{cases} u = \frac{E_y}{1 - \mu_{xy} \mu_{yx}} \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial y^2} + G_{xy} \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial t^2}, \\ v = - \left(\frac{E_y \mu_{yx}}{1 - \mu_{xy} \mu_{yx}} + G \right) \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial x \partial y}. \end{cases}$$

Punînd condiția ca fiecare din aceste reprezentări, care sînt date de cîte una din ecuațiile (9.5), să verifice cealaltă ecuație, rezultă că funcția $\mathfrak{F}$ trebuie să satisfacă ecuația

$$(9.7) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{E_y} \frac{\partial^4 \mathfrak{F}}{\partial x^4} + \left(\frac{1}{G_{xy}} - \frac{\mu_{yx}}{E} - \frac{\mu_{xy}}{E_y} \right) \frac{\partial^4 \mathfrak{F}}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{E_x} \frac{\partial^4 \mathfrak{F}}{\partial y^4} - \\ & - \frac{\rho}{E_y} \left(\frac{1 - \mu_{xy} \mu_{yx}}{E_x} + \frac{1}{G_{xy}} \right) \frac{\partial^4 \mathfrak{F}}{\partial x^2 \partial t^2} - \frac{\rho}{E_x} \left(\frac{1 - \mu_{xy} \mu_{yx}}{E_y} + \frac{1}{G_{xy}} \right) \frac{\partial^4 \mathfrak{F}}{\partial y^2 \partial t^2} + \\ & + \frac{\rho^2 (1 - \mu_{xy} \mu_{yx})}{E_x E_y G_{xy}} \frac{\partial^4 \mathfrak{F}}{\partial t^4} = 0. \end{aligned}$$

O soluție de această formă este utilă pentru cea de-a doua problemă fundamentală a teoriei elasticității (condiții în deplasări).

Discriminantul formei (9.7), considerată ca o formă pătratică, se poate scrie sub forma

$$(9.8) \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{E_y} & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{G_{xy}} - 2 \frac{\mu_{xy}}{E_x} \right) & - \frac{\rho}{2E_y} \left(\frac{1 - \mu_{xy} \mu_{yx}}{E_x} + \frac{1}{G_{xy}} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{G_{xy}} - 2 \frac{\mu_{yx}}{E_x} \right) & \frac{1}{E_x} & - \frac{\rho}{2E_x} \left(\frac{1 - \mu_{xy} \mu_{yx}}{E_y} + \frac{1}{G_{xy}} \right) \\ - \frac{\rho}{2E_y} \left(\frac{1 - \mu_{xy} \mu_{yx}}{E_x} + \frac{1}{G_{xy}} \right) & - \frac{\rho}{2E_x} \left(\frac{1 - \mu_{xy} \mu_{yx}}{E_y} + \frac{1}{G_{xy}} \right) & \frac{\rho^2 (1 - \mu_{xy} \mu_{yx})}{E_x E_y G_{xy}} \end{vmatrix}.$$

Este evident că acest discriminant nu poate fi egal cu zero (dacă îl prii vim, de exemplu, ca pe un polinom în $1/G_{xy}$ rezultă că coeficientul termenului de gradul al treilea al acestui polinom este diferit de zero). Spre deosebire de cazul izotrop, în acest caz undele elastice nu se mai pot descompune în două

tipuri de unde (de exemplu, unde irotaționale și unde de forfecare), ci există un singur front de undă.

Astfel, în cazul undelor irotaționale ar trebui să fie îndeplinită relația

$$(9.9) \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Ținând seama de (9.5), deplasările u și v ar trebui să verifice ecuațiile

$$(9.10) \quad \begin{cases} E_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + [2G_{xy}(1 - \mu_{xy}\mu_{yx}) + E_x\mu_{xy}] \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \rho(1 - \mu_{xy}\mu_{yx}) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \\ [2G_{xy}(1 - \mu_{xy}\mu_{yx}) + E_y\mu_{yx}] \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + E_y \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \rho(1 - \mu_{xy}\mu_{yx}) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0. \end{cases}$$

Pe de altă parte, aceste deplasări trebuie să fie integrale ale ecuației (9.7). Condițiile respective sînt îndeplinite simultan numai în cazuri particulare.

Pentru rezolvarea problemei se pot elimina u și v între ecuațiile (9.1), (9.2), (9.2)'. În felul acesta, tensiunile normale se pot exprima sub forma generală

$$(9.11) \quad \begin{cases} \sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - (1 + \mu_{xy}) \frac{\rho}{E_y} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}, \\ \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - (1 + \mu_{yx}) \frac{\rho}{E_x} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}, \end{cases}$$

iar tensiunea tangențială prin

$$(9.11') \quad \begin{aligned} \tau_{xy} = & -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \iint \left(\frac{1}{E_y} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{E_x} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \right. \\ & \left. - \frac{1 - \mu_{xy}\mu_{yx}}{E_x E_y} \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) F dx dy + \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{1}{E_x} f_1(y; t) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{E_y} f_2(x; t) \right]. \end{aligned}$$

Relațiile (9.2) ne dau componentele deplasării

$$(9.12) \quad \begin{cases} E_x u = \int \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dx - \mu_{yx} \frac{\partial F}{\partial x} - (1 - \mu_{xy}\mu_{yx}) \frac{\rho}{E_y} \int \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} dx + \frac{\partial f_1(y; t)}{\partial y}, \\ E_y v = \int \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dy - \mu_{xy} \frac{\partial F}{\partial y} - (1 - \mu_{xy}\mu_{yx}) \frac{\rho}{E_x} \int \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} dy + \frac{\partial f_2(x; t)}{\partial x}. \end{cases}$$

Prin eliminarea lui u și v între relațiile (9.2), (9.2') se găsește ecuația de continuitate

$$(9.13) \quad \frac{1}{E_x} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \mu_{yx} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \sigma_x + \frac{1}{E_y} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \mu_{xy} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \sigma_y = \frac{1}{G_{xy}} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x \partial y},$$

care arată că funcția de tensiune $F(x, y, t)$ trebuie să verifice aceeași ecuație diferențială cu derivate parțiale (9.7).

Relația (9.2') precizează funcțiile $f_1(y; t)$, $f_2(x; t)$, prin ecuația

$$(9.14) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{E_x} \int \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dx + \frac{1}{E_y} \int \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dy + \left(\frac{1}{G_{xy}} - \frac{\mu_{yx}}{E_x} - \frac{\mu_{xy}}{E_y} \right) \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} - \\ & - (1 - \mu_{xy} \mu_{yx}) \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{1}{E_y} \int \frac{\partial F}{\partial y} dx + \frac{1}{E_x} \int \frac{\partial F}{\partial x} dy \right) - \\ & - \frac{\rho}{G_{xy}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \iint \left(\frac{1}{E_y} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{E_x} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1 - \mu_{xy} \mu_{yx}}{E_x E_y} \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) F dx dy + \\ & + \frac{1}{E_y} \frac{\partial^2 f_1(y; t)}{\partial y^2} - \frac{1}{E_y} \frac{\partial^2 f_2(x; t)}{\partial x^2} - \frac{\rho}{G_{xy}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{1}{E_x} f_1(y; t) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{E_y} f_2(x; t) \right] = 0. \end{aligned}$$

Dacă se introduc peste tot în (9.14) integrale duble în raport cu x și y , se găsește sub semnul integral aceeași expresie ca în (9.7). Ecuația (9.14) are deci variabile separate și se poate descompune în două ecuații de forma

$$(9.15) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 f_1(y; t)}{\partial y^2} - \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 f_1(y; t)}{\partial t^2} + F_1(y; t) + E_x \left[\omega_0 + \frac{1}{\alpha^2} \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} \right] = 0, \\ \frac{\partial^2 f_2(x; t)}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 f_2(x; t)}{\partial t^2} + F_2(x; t) - E_y \left[\omega_0 + \frac{1}{\alpha^2} \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} \right] = 0, \end{cases}$$

unde $\theta(t)$ este o funcție arbitrară iar α este o viteză de propagare a undelor dată de

$$(9.16) \quad \frac{1}{\alpha^2} = \frac{\rho}{G_{xy}}.$$

Prin integrare căpătăm

$$(9.17) \quad \begin{cases} f_1(y; t) = \varphi_1(y - \alpha t) + \psi_1(y + \alpha t) + \bar{f}_1(y; t) + \\ \quad + E \left(-\omega_0 \frac{y^2}{2} + u_0 y \right) + E_x \theta(t), \\ f_2(x; t) = \varphi_2(x - \alpha t) + \psi_2(x + \alpha t) + \bar{f}_2(x; t) + \\ \quad + E_y \left(\omega_0 \frac{x^2}{2} + v_0 x \right) - E_y \theta(t), \end{cases}$$

unde $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ sînt funcții oarecare, $f_1(y; t), f_2(x; t)$ sînt integrale particulare ale ecuațiilor (9.15) iar u_0, v_0 și ω_0 sînt deplasările, respectiv rotirea corpului considerat ca un rigid. Această formulare generalizează rezultatele date de G. -B. Airy [1], [2] pentru problema plană statică izotropă. Se observă că funcția $\theta(t)$ poate fi luată egală cu zero.

Funcția de tensiune poate fi luată sub forma (2.24), (2.25), prin supra-punerea vibrațiilor armonice.

Ecuația (9.7) capătă forma

$$(9.18) \quad \frac{1}{E_y} \frac{\partial^4 F_n}{\partial x^4} + \left(\frac{1}{G_{xy}} - \frac{\mu_{yx}}{E_x} - \frac{\mu_{xy}}{E_y} \right) \frac{\partial^4 F_n}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{E_x} \frac{\partial^4 F_n}{\partial y^4} + \\ + \frac{\rho}{E_y} \left(\frac{(1 - \mu_{xy} \mu_{yx})}{E_x} + \frac{1}{G_{xy}} \right) \frac{\partial^2 F_n}{\partial x^2} + \frac{\rho}{E_x} \left(\frac{(1 - \mu_{xy} \mu_{yx})}{E_y} + \frac{1}{G_{xy}} \right) \frac{\partial^2 F_n}{\partial y^2} + \frac{\rho^2 (1 - \mu_{xy} \mu_{yx})}{E_x E_y G_{xy}} F = 0$$

și ne dă o stare de tensiune corespunzătoare vibrațiilor staționare.

Cu ajutorul acestor rezultate se pot studia, în mod analog, problemele considerate mai sus, construind integrale ale ecuației (9.18) prin separarea variabilelor.

În caz tridimensional, problemele se pot formula pe aceeași cale.

9.2. Corpuri neomogene. Neomogenitatea unui corp elastic este pusă în evidență prin faptul că constantele sale elastice sînt funcții de punct. În acest caz, problemele elastodinamicii ne conduc la ecuații cu coeficienți variabili și apar vibrații neliniare. Aceste probleme sînt cu mult mai grele și, după cunoștința noastră, nu au fost studiate pînă în prezent.

În cele ce urmează vom considera corpuri izotrope și liniar elastice și vom da unele rezultate pe care le-am obținut în lucrarea [59]. Neomogenitatea materialului este precizată prin modulul de elasticitate $E = E(x_i)$ în spațiul euclidian (x_i) , coeficientul de contracție transversală al lui Poisson μ fiind considerat constant¹. Masa specifică fie de forma $\rho = \rho(x_i)$.

Vom introduce tensiunile reduse

$$(9.19) \quad \bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{E},$$

și forțele de volum reduse

$$(9.20) \quad \bar{X}_i = \frac{X_i}{E},$$

masa specifică redusă

$$(9.21) \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{E}$$

și modulul de elasticitate de forma

$$(9.22) \quad E = E_0 e^{f(x_j)}.$$

Ecuațiile de mișcare vor fi

$$(9.23) \quad \bar{\sigma}_{ij, i} + f_{,j} \bar{\sigma}_{ij} + \bar{X}_i = \bar{\rho} \ddot{u}_i,$$

¹ Pentru simplificarea scrierii, la acest punct se vor folosi notații tensoriale și convenția de sumare a lui Einstein.

unde indicii la dreapta virgulei indică variabila în raport cu care s-a derivat.

Cu legea lui Hooke

$$(9.24) \quad \varepsilon_{ij} = (1 + \mu) \bar{\sigma}_{ij} - \mu \bar{\sigma}_{kk} \delta_{ij},$$

unde ε_{ij} sînt deformațiile specifice iar δ_{ij} este simbolul lui Kronecker, și cu ecuațiile de continuitate ale lui Saint-Venant

$$(9.25) \quad \varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} = \varepsilon_{ik,jl} + \varepsilon_{jl,ik},$$

se găsesc ecuațiile de continuitate în tensiuni și anume ecuații liniare cu coeficienți constanți. Ecuațiile (9.23), (9.24), (9.25) permit astfel o rezolvare a problemei elastodinamice în tensiuni.

Prin eliminarea tensiunilor între (9.23) și (9.24) și cu relațiile lui Cauchy

$$(9.26) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}),$$

care leagă deformațiile specifice de deplasări, se ajunge la ecuațiile analoage ecuațiilor lui Lamé

$$(9.27) \quad u_{i,jj} + \frac{1}{1-2\mu} u_{j,ji} + \frac{2\mu}{1-2\mu} f_{,i} u_{j,j} + f_{,i} (u_{i,j} + u_{j,i}) + 2(1+\mu) \bar{X}_i = 0,$$

care permit o rezolvare a problemei elastodinamicii în depăsări.

În prima problemă fundamentală condițiile pe contur sînt de forma

$$(9.28) \quad t \geq t_0: \bar{p}_{ni} = \bar{\sigma}_{ij} n_j,$$

cu notațiile

$$(9.29) \quad \bar{p}_{ni} = \frac{p_{ni}}{E},$$

unde p_{ni} este încărcarea pe elementul de contur de normală exterioară $\vec{n}$.

Pentru a doua problemă fundamentală condițiile pe contur vor fi de forma

$$(9.30) \quad t \geq t_0: u_i = \bar{u}_i,$$

unde $\bar{u}_i$ reprezintă deplasările corespunzătoare aceluiași element de contur.

Apoi se pun condițiile inițiale pentru întreg domeniul ocupat de corpul elastic sub forma

$$(9.31) \quad t = t_0: u_i = \dot{u}_i(x_k), \quad \dot{u}_i^0 = \dot{u}_i^0(x_k).$$

Ca și în cazul static corespunzător [59], [60] se poate da o metodă de rezolvare a problemei prin aproximații succesive pentru cazul $\bar{p} = \text{const}$,

admițind că neomogenitatea care precizează masa specifică este de același tip ca și neomogenitatea modulului de elasticitate longitudinală

$$(9.32) \quad \rho = \rho_0 e^{f(x_j)}.$$

Tensiunile se vor scrie sub forma

$$(9.33) \quad \bar{\sigma}_{ij} = \bar{\sigma}_{ij}^0 + \sum_{k=1}^n \bar{\sigma}_{ij}^{(k)}.$$

Prin neglijarea termenilor cu coeficienți variabili în ecuațiile de mișcare, acestea capătă o formă analoagă cu cea a ecuațiilor Cauchy pentru corpuri omogene; ecuațiile (9.23), (9.24), (9.25) arată că, în acest caz, aproximația de ordinul zero corespunde soluției problemei pentru corpul omogen asupra căruia acționează forțe masice date, cu condițiile la limită (9.28) și condițiile inițiale (9.31).

Pentru calculul aproximației de ordinul k , admițind că aproximația de ordinul $(k-1)$ este cunoscută, conducându-ne la forțele masice reduse

$$(9.34) \quad \bar{X}_i^{(k)} = f_{,i} \bar{\sigma}_{ij}^{(k-1)},$$

se studiază problema pentru un corp omogen supus acțiunii forțelor masice $\bar{X}_i^{(k)}$, cu condiții pe contur și condiții inițiale omogene.

Soluția problemei elastodinamice în tensiuni pentru un corp neomogen (vibrații neliniare) se poate astfel reduce la rezolvarea în tensiuni a unui șir de probleme elastice pentru același corp, acesta fiind considerat omogen (vibrații liniare) și supus unor sarcini convenționale.

Convergența procesului de iterație dat mai sus poate fi apreciată prin interpretarea lui fizică: forțele masice convenționale $\bar{X}_i^{(n)}$ trebuie să dea o stare de tensiune neglijabilă în raport cu starea de tensiune care se caută.

În același fel se poate găsi și o rezolvare în deplasări cu ajutorul ecuațiilor (9.27) și a condițiilor (9.30), (9.31).

În cazul particular al unui corp cu o rigiditate constantă în plane paralele

$$(9.35) \quad f(x_j) = a_i x_i \quad (a_i = \text{const}),$$

se găsesc ecuații cu coeficienți constanți (vibrații liniare).

În acest caz particular se găsesc rezultate interesante pentru cazul bidimensional și pentru cazul tridimensional, care constituie o generalizare a rezultatelor obținute pentru cazul static corespunzător [62], [63].

§ 10. Concluzii

Problemele considerate aici au un domeniu larg de aplicabilitate; ele, au atât un interes teoretic cât și un interes practic, de exemplu în seismică.

S-a căutat să se prezinte o metodă unitară de rezolvare a acestor probleme cu ajutorul potențialilor reali, ținându-se seama și de analogia dintre diferite probleme. Apoi se observă că pentru diferitele domenii studiate se

pot introduce funcții de tensiune de aceeași formă; prin urmare este posibil un studiu sistematic în această direcție.

Un întreg șir de probleme considerate mai sus (de exemplu, problemele neliniare ale corpurilor neomogene) nu au fost încă studiate — rămâne deci un câmp larg pentru cercetări ulterioare în această direcție.

BIBLIOGRAFIE

1. G. B. Airy: On the strains in the interior of beams, Rep. Brit. Assoc. Adv. Sci., 20 (1862) 82.
2. G. B. Airy: On the strains in the interior of beams. Phil. Trans. Roy. Soc. London, 153 (1863) 49.
3. R. E. D. Bishop: Dynamical problems of plane stress and plane strain, Quart. J. Mech. Appl. Math., 6 (1953) 250.
4. T. Boggio: Sull'integrazione di alcuni equazioni lineari alle derivati parziali, Ann. Mat. Pura Appl., Ser.3,8 (1903) 181—232.
5. М. Н. Бородарев: Решение плоской динамической задачи теории упругости при помощи рядов Фурье, Изв. Акад. Наук СССР, О.Т.Н., мех. и машиностр. (1960) 161.
6. A. Clebsch: Über die Reflexion an einer Kugelfläche, Journ. reine u. angew. Math., 61 (1863) 195—262.
7. L. N. G. Filon: On an approximate solution for the bending of a beam of rectangular cross-section under any system of load, Phil. Trans. Roy. Soc. London, 206 (1903) 63.
8. B. G. Galerkin: Contribution à la solution générale du problème de la théorie de l'élasticité dans le cas de trois dimensions, C. R. Acad. Paris, 190 (1930) 1047—1048.
9. B. Golistin: Über die Dispersion und Dämpfung der seismischen Oberflächwellen, Bull. Acad. Imp. Sci. St. Petersburg, Ser. VI (1912) 219—236.
10. M. Iacovache: O extindere a metodei lui Galerkin pentru sistemul ecuațiilor elasticității, Bul. științ. Acad. R.P.R., ser.A, 1 (1949) 593—595.
11. J. Ignaczak: Direct determination of stresses from the stress equations of motion in elasticity, Archiw. Mech. Stos., 11 (1959) 671—678.
12. D. Ionescu: Asupra vectorului lui Galerkin în teoria elasticității și în hidrodinamica fluidelor viscoase, Bul. științ. Acad. R.P.R., secț. șt. mat.-fiz., 6(1954) 555—571.
13. S. Kaliski: Pewne problemy brzegowe dynamicznej teorii sprężystości i ciał niesprężystych. Biul. Wojsk Akad. Techn. im. Iar. Dabrowskiego 6 (1957) 3—306.
14. H. Lamb: Phil. Trans. Roy Soc. London, 203 (1904).
15. K. Marguerre: Ebenes und achsensymmetrisches Problem der Elastizitätstheorie, Z. A. M. M., 13(1933) 437.
16. Gr. C. Moisil: Teoria preliminară a sistemelor de ecuații cu derivate parțiale liniare cu coeficienți constanți, Bul. științ. Acad. R.P.R., secț. șt. mat.-fiz., 4(1952) 319—401.
17. H. Neuber: Ein neuer Ansatz zur Lösung räumlicher Probleme der Elastizitätstheorie. Der Hohlkegel unter Einzellast als Beispiel, Z.A.M.M., 14 (1934) 203.
18. W. Noll: Verschiebungsfunktionen für elastische Schwingungsprobleme, Z.A.M.M., 37 (1957), 81—87.
19. W. Nowacki: Dynamika budowli, Arkady, Warszawa, 1961.
20. P. F. Papkovitch, Solution générale des équations différentielles fondamentales d'élasticité, exprimée par trois fonctions harmoniques, C. R. Acad. Paris, 195 (1932) 513—515.
21. M. Predleanu: Über die Verschiebungsfunktionen für das achsensymmetrische Problem der Elastodynamik, Z.A.M.M., 38 (1958) 402—404.
22. J. R. M. Radok: On the solution of problems of dynamic plane elasticity, Quart. Appl. Math., 14 (1956) 289—298.
23. Rayleigh, lord (J. W. Strutt): Proc. London Math. Soc., 17 (1887) 4.

24. Rayleigh, lord (J. W. Strutt): Scientific Papers, 2, 441.
25. M. Ribière: Sur divers cas de la flexion des prismes rectangles, Thèse, Paris, 1889.
26. L. Sobrero: Delle funzioni analoghe al potenziale intervenienti nella fisica matematica, Rend. Accad. Naz. Lincei, Ser. 6, 21 (1935) 448—454.
27. E. Sternberg, R. A. Eubanks: On stress functions for elastokinetics and the integration of the repeated wave equation, Quart. Appl. Math., 15 (1957) 149—153.
28. G. G. Stokes: Dynamical theory of diffraction, Trans. Phil. Soc. Cambridge, 9 (1849) 12.
29. Н. Шандру: О действии переменных по времени сосредоточенных сил в неограниченном упругом пространстве, Bull. Acad. Pol. Sci., sér. Sci. Techn., 12 (1964) 45—47.
30. P. P. Teodorescu: Asupra unei metode generale de rezolvare a problemei plane a elastodinamicii, Com. Acad. R.P.R., 6 (1956) 795—801.
31. P. P. Teodorescu: O metodă de rezolvare în eforturi a problemei plane a micilor mișcări amortizate, Bul. șt. Acad. R.P.R., secț. șt. mat. fiz., 8 (1956) 723—732.
32. P. P. Teodorescu: Asupra problemei plane a termoelasticității, Bul. șt. Acad. R.P.R., secț. șt. mat.-fiz., 9 (1957) 471—479.
33. P. P. Teodorescu: Asupra problemei plane a teoriei elasticității în cazul unor forțe masice oarecate, Bul. șt. Acad. R.P.R., secț. șt. mat.-fiz., 9 (1957) 481—489.
34. P. P. Teodorescu: Asupra unor probleme ale elastodinamicii plane, Bul. Inst. polit. București, 19 (1957) 195—207.
35. P. P. Teodorescu: Asupra calculului grinzilor pereți cu o singură deschidere, I, II, St. și cerc. mec. apl., 8 (1957) 115—134; 451—490.
36. P. P. Teodorescu: Asupra calculului semispațiului elastic sub acțiunea unor sarcini periodice, St. și cerc. mec. apl., 8 (1957) 831—838.
37. P. P. Teodorescu: Asupra problemei plane a elasticității unor corpuri anizotrope. I. Relații între eforturi unitare și deformații specifice, Com. Acad. R.P.R., 7 (1957) 395—400.
38. P. P. Teodorescu: Asupra problemei plane a elasticității unor corpuri anizotrope. II. Corpuri ortotrope, Com. Acad. R.P.R., 7 (1957) 503—508.
39. P. P. Teodorescu: Asupra problemei plane a elasticității unor corpuri anizotrope. IX. Cazul micilor mișcări elastice, Com. Acad. R.P.R., 8 (1958) 1243—1250.
40. P. P. Teodorescu: Über die Berechnung des elastischen Halbraumes unter örtlicher Belastung, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R.P.R., 2(50) (1958) 113—121.
41. P. P. Teodorescu: Asupra calculului de rezistență al plăcilor plane groase, St. și cerc. mec. apl., 9 (1958) 721—731.
42. P. P. Teodorescu: Über die Berechnung dicker ebener Platten unter örtlicher Belastung, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R.P.R., 2(50) (1958) 463—473.
43. P. P. Teodorescu: Über einige räumliche Probleme der Elastizitätstheorie, Apl. Matem., Praga, 4 (1959) 225—238.
44. P. P. Teodorescu: Fonctions de tension dans le problème tridimensionnel de la théorie de l'élasticité, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R.P.R., 3(51) (1959) 499—508.
45. P. P. Teodorescu: Sur une représentation par potentiels dans le problème tridimensionnel de l'élastodynamique, C.R. Acad. Paris, 250 (1960) 1792—1794.
46. P. P. Teodorescu: Asupra problemei spațiale a elastodinamicii, St. și cerc. mec. apl., 11 (1960) 681—694.
47. P. P. Teodorescu: Asupra unor sisteme infinite de ecuații liniare care intervin în problema plană a teoriei elasticității pentru un domeniu dreptunghiular, St. și cerc. mec. apl., 11 (1960) 925—935.
48. P. P. Teodorescu: Funcții de tensiune în problema plană a teoriei elasticității, St. și cerc. șt. (Iași), Mat., 11 (1960) 363—374.
49. P. P. Teodorescu: Sur le problème de la demibande plane élastique, Arch. Mech. Stos., 12 (1960) 313—331.
50. P. P. Teodorescu: Sur le problème du parallélépipède élastique, Arch. Mech. Stos., 12 (1960) 705—727.
51. P. P. Teodorescu: Sur le problème du quart de plan élastique, Apl. Matem., Praga, 6 (1961) 359—378.
52. P. P. Teodorescu: Probleme plane în teoria elasticității, I. Edit. Acad. R.P.R.; București, 1961.
53. P. P. Teodorescu: Asupra calculului grinzilor pereți dreptunghiulare în cazul unor forțe masice oarecate, St. și cerc. șt. (Iași), Mat., 13 (1962) 369—381.

54. P. P. Teodorescu: Sur les équations du problème plan de la théorie de l'élasticité en coordonnées curvilignes quelconques, C.R. Acad. Paris, 255 (1962) 1181—1183.
55. P. P. Teodorescu: Le problème plan de la théorie de l'élasticité en coordonnées curvilignes arbitraires. I. Opérateurs différentiels, II. État de tension, III. État de déformation. Loi de Hooke, IV. Formulation en tensions du problème, V. Formulation en déplacements du problème. Méthodes de calcul, Bull. Acad. Pol. Sci., sér. Sci. Techn., 10 (1962) 269—282; 283—290; 291—299; 313—320; 321—328.
56. P. P. Teodorescu: Asupra unor probleme de elastodinamică plană, An. Univ. București, ser. șt. nat., mat.-fiz., 12 (1963) 21—42.
57. P. P. Teodorescu: Asupra calculului optimei de spațiu elastic supusă acțiunii unor sarcini tangențiale, An. Univ. București, ser. șt. nat., mat.-mec., 13 (1964) 41—69.
58. P. P. Teodorescu: Sur l'effet de coin en élasticité tridimensionnelle, Arch. Mech. Stos., 16 (1964) 249—276.
59. P. P. Teodorescu: Über das kinetische Problem nicht homogener elastischer Körper, Bull. Acad. Pol. Sci., sér. Sci. Techn., 12 (1964) 595—598.
60. P. P. Teodorescu: Über das dreidimensionale Problem der Elastokinetik, Z.A.M.M., 45 (1965) 513—523.
61. P. P. Teodorescu: Asupra unor probleme dinamice ale teoriei elasticității, An. Univ. București, ser. șt. nat., mat.-mec., 14 (1965) 23—24.
62. P. P. Teodorescu, M. Predeleanu: Über das ebene Problem nichthomogener elastischer Körper, Acta Techn. Acad. Sci. Hung., 27(1959) 349—369.
63. P. P. Teodorescu, M. Predeleanu: Quelques considérations sur le problème des corps élastiques hétérogènes, Non-homogeneity in elasticity and plasticity, Proc. IUTAM-Symposium, Warsaw, 1958, Pergamon Press (1959) 31—38.

Primit la redacție la 20. XI. 1968.

ВИБРАЦИИ НЕПРЕРЫВНЫХ УПРУГИХ СРЕД

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

После короткого обзора задач линейных вибраций упругих тел в случаях двух и трех измерений, даются общие математические формулировки в напряжениях. Задача собственных вибраций и задача вынужденных вибраций разрешены в этих двух случаях для конечных областей, имеющих форму прямоугольника или параллелипипеда и для всех бесконечных областей ограниченных параллельными прямыми или плоскостями (например, упругая полуплоскость, плоская упругая полоса, четверть упругой плоскости, упругая плоская полоса, упругое полупространство, четверть упругого пространства и т.д.).

Полученные здесь результаты распространяются на соответствующие задачи неоднородных или анизотропных тел.

LES VIBRATIONS DES MILIEUX CONTINUS ÉLASTIQUES

R É S U M É

Après avoir passé en revue les problèmes des vibrations linéaires des solides élastiques dans le cas de deux ou de trois dimensions, on donne des formulations mathématiques générales en tensions. Le problème des vibrations propres et le problème des vibrations forcées sont résolus dans ces deux cas pour des domaines finis ayant la forme d'un rectangle ou d'un parallélépipède et pour tous les domaines infinis bornés par des droites ou des plans parallèles aux lignes de coordonnées ou aux plans des coordonnées (par exemple, le demiplan élastique, la bande plane élastique, le quart de plan élastique, la demibande plane élastique, le demiespace élastique, le quart d'espace élastique etc.). Les résultats obtenus ci-dessus sont généralisés aux problèmes correspondants des corps anisotropes ou non-homogènes.

ÎN LEGĂTURĂ CU BAZELE DE SUBSPAȚII

NICOLAE TIȚA

În ultimul timp, în problema bazelor vectoriale, pătratic apropiate de o bază ortonormală s-au adus unele generalizări și anume s-a introdus bazele p-apropiate de o bază ortonormală. Avînd în vedere faptul că în lucrarea [1] s-au dat unele rezultate pentru bazele de subspații, analoge celor obținute pentru bazele vectoriale patratic apropiate de o bază ortonormală se pune problema prezentării acestora într-o formă mai generală.

În această lucrare se prezintă, după modelul lui [1] și [3] noțiunea de bază de subspații p-apropiată de o bază ortogonală și se dau cîteva rezultate analoge celor găsite pentru $p = 2$.

Fie H spațiul Hilbert și $\{\mathfrak{N}_K\}_1^\infty$ o familie de subspații nenule ale lui H . Se spune că $\{\mathfrak{N}_K\}$ este o bază de subspații a lui H dacă orice $x \in H$ se reprezintă unic sub forma:

$$x = \sum_1^\infty x_K, \quad x_K \in \mathfrak{N}_K \quad (K = 1, 2, \dots)$$

Reprezentarea se mai scrie $x = \sum N_K x$, unde $\{N_K\}$ este o familie de proiectori ortogonali ¹ continui.

O familie de subspații $\{\mathfrak{N}_K\}$ ortogonale două cîte două formează o bază ortogonală. O altă bază $\{\mathfrak{M}_K\}$ obținută din $\{\mathfrak{N}_K\}$ prin aplicarea unui operator mărginit și inversabil se cheamă echivalentă cu ortogonală.

Șirul $\{\mathfrak{N}_K\}_1^\infty$ se va numi ω — liniar independent dacă $\sum_1^\infty x_K = 0$ nu este posibil pentru $0 < \sum |x_K|^2 < \infty$.

Două șiruri de subspații $\{\mathfrak{N}_K\}$ și $\{\mathfrak{M}_K\}$ se vor numi p-apropiate dacă $\sum |P_K - Q_K|^p < \infty$, unde P_K și Q_K sînt ortoproiectori pe $\{\mathfrak{N}_K\}$ și $\{\mathfrak{M}_K\}$ respectiv.

Pentru două subspații m și n se definește noțiunea de unghi minimal ca fiind $0 < \varphi(m, n) \leq \frac{\pi}{2}$ dat de relația

$$\cos \varphi(m, n) = \sup_{\substack{x \in m, y \in n \\ |x| = |y| = 1}} |(x, y)|$$

Pentru cele ce urmează avem nevoie de următoarele rezultate:

Propoziția 1²: Fie P și Q doi proiectori. Dacă $|P - Q| < 1$ atunci PH și QH au aceeași dimensiune.

Demonstrație: Operatorul $I - (P - Q)$ este inversabil

$$(I - P + Q)^{-1} = I + \sum_1^{\infty} (P - Q)^j \text{ și deci } (I - P + Q)H = H$$

Rezultă

$$P(I - P + Q)H = PH, \text{ dar cum } P^2 = P \text{ deducem}$$

$$PQH = PH \text{ sau } PK(Q) = K(P)^3$$

Deci operatorul P transformă subspațiul QH în PH .

Pentru $f \in QH$ avem

$$|Pf| = |f + (P - Q)f| \geq (1 - |P - Q|) |f|$$

Deci P reprezintă QH în PH izomorf.

Propoziția 2-a: Dacă $m_1 = m^\perp$, și $n \dot{+} m_1 = H^4$ atunci $|P - Q| = \cos \varphi(n, m_1)$, unde P și Q sînt ortoproiectori pe m și n respectiv⁵.

Demonstrație: Pentru $x \in m$ și $y \in m_1$ se obține

$$((P - Q)x, (P - Q)y) = -((I - Q)x, Qy) = -(Q(I - Q)x, y) = 0$$

Rezultă

$$|P - Q| = \max(|P - Q|_m, |P - Q|_{m_1}), \text{ unde } |A|_m = \sup_{x \in m, |x|=1} |Ax|$$

Evident $|P - Q|_{m_1} = |Q|_{m_1}$ și cum

$$|Q|_{m_1} = \sup_{\substack{x \in m_1, y \in n \\ |x|=|y|=1}} |(x, y)| = \cos \varphi(n, m_1) \text{ rezultă}$$

$$|P - Q|_{m_1} = \cos \varphi(n, m_1) \quad (1)$$

Schimbînd m_1 în m și n în $n_1 = n^\perp$ și P în $I - P$, Q în $I - Q$ se obține

$$|P - Q|_m = \cos(n_1, m) \quad (2)$$

Cum membrii dreپتي din (1) și (2) sînt egali⁶ rezultă că

$$|P - Q| = \cos \varphi(n, m_1)$$

Se pot extinde acum unele rezultate de la bazele vectoriale și la bazele de subspații.

Teorema 1. Un șir de subspații $\{\mathfrak{U}_K\}_1^\infty$ complet și ω -liniar independent, p -apropiat de o bază $\{\mathfrak{M}_K\}_1^\infty$ echivalentă cu o bază ortogonală este de asemenea o bază echivalentă cu ortogonală.

Demonstrație. Fie $\{\mathcal{D}_K\}_1^\infty$ baza ortogonală, care se transformă prin operatorul mărginit și inversabil A în $\{\mathfrak{M}_K\}$. Luăm pe n suficient de mare astfel ca

$$\sum_{K=n}^{\infty} |P_K - Q_K|^p < (|A| \cdot |A^{-1}|)^{-p}$$

notăm

$B = \sum_{K=n}^{\infty} (Q_K - P_K)AR_K$, unde P_K, Q_K, R_K sînt ortoproietori, care proiectează pe H respectiv pe $\mathfrak{M}_K, \mathfrak{N}_K$ și $\mathcal{D}_K$.

Se obține

$$|Bx|^p \leq \left(\sum_{K=n}^{\infty} |Q_K - P_K| |(A) || R_K x| \right)^p \leq |A|^p \sum_{K=n}^{\infty} |Q_K - P_K|^p \cdot \sum_{K=n}^{\infty} |R_K x| \leq \\ \leq |A|^p \sum_{K=n}^{\infty} |Q_K - P_K|^p |x|^p$$

Deci $|B| < |A^{-1}|^{-1}$. Rezultă că operatorul $A + B$ este inversabil. Pentru $x \in \mathcal{D}_K (K \geq n)$, $(A + B)x = Q_K Ax$. Dar cum $|P_K - Q_K| < 1$, în baza propoziției 1, Q_K transformă izomorf subspațiul $\mathfrak{M}_K$ în $\mathfrak{N}_K$. Deci $A + B$ transformă izomorf subspațiul $\mathcal{D}_K$ în $\mathfrak{N}_K (K \geq n)$. Notăm cu $\mathcal{D}$ și respectiv $\mathfrak{N}$ suma directă a subspațiilor $\mathcal{D}_K (K=1, 2, \dots, n-1)$ și $\mathfrak{N}_K (K=1, 2, \dots, n-1)$, iar cu $\widetilde{\mathcal{D}}$ și $\widetilde{\mathfrak{N}}$ învelișurile lineare închise ale lui $\mathcal{D}_K (K=n, \dots)$ și $\mathfrak{N}_K (K=n, \dots)$. Evident $\mathcal{D} \oplus \widetilde{\mathcal{D}} = H$ și arătăm că $\mathfrak{N} \dot{+} \widetilde{\mathfrak{N}} = H$. Este suficient de arătat că $\mathfrak{N} \cap \widetilde{\mathfrak{N}} = 0$. Considerăm $x \in \mathfrak{N} \cap \widetilde{\mathfrak{N}}$. Cum $x \in \mathfrak{N}$ rezultă

$$x = \sum_1^{n-1} x_K, \quad x_K \in \mathfrak{N}_K. \quad \text{Dar } x \in \widetilde{\mathfrak{N}} \text{ și deci } x = (A + B)y \text{ cu } y \in \widetilde{\mathcal{D}}$$

$$\left(y = \sum_{K=n}^{\infty} y_K, \quad y_K \in \mathcal{D}_K \right).$$

Se obține

$$x = \sum_n^{\infty} x_K, \quad x = (A + B)y_K \in \mathfrak{N}_K.$$

Din relațiile de mai sus și ω -liniar independenta lui $\{\mathfrak{N}_K\}$ rezultă $x_K = 0 (x = 0)$. Cum $(A + B)\widetilde{\mathcal{D}} = \widetilde{\mathfrak{N}}$, rezultă $\dim \mathcal{D} = \dim \mathfrak{N}$ și deci $\mathcal{D}$ se descompune într-o sumă ortogonală de $\hat{\mathcal{D}}_K (K=1, 2, \dots, n-1)$, astfel că $\dim \hat{\mathcal{D}}_K = \dim \mathfrak{N}_K (K=1, 2, \dots, n-1)$.

Fie $\hat{C}$ operatorul mărginit și inversabil ca transformă $\mathcal{D}$ în $\mathfrak{N} (\hat{\mathcal{D}}_K \rightarrow \mathfrak{N}_K)$. Fie C operatorul care coincide pe $\mathcal{D}$ cu $A + B$ și pe $\mathcal{D}$ cu $\hat{C}$. Acest operator linear mărginit și inversabil transformă baza $\hat{\mathcal{D}}_1, \hat{\mathcal{D}}_2, \dots, \hat{\mathcal{D}}_{n-1}, \mathcal{D}_n, \dots$ în $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \dots$.

Deci $\{\mathfrak{N}_K\}$ este echivalentă cu o bază ortogonală.

¹ $N_j N_K = \delta_{jK} N_K$

² Se poate vedea B. N a g h y: „Perturbations des transf. lineaires fermés”. Acta. Sci. Math. 14. Nr. 2. 1951.

³ $K(P)$; este domeniul valorilor lui P

⁴ $n \dot{+} m_1$ este suma directă.

⁵ Se poate vedea [3].

⁶ Se ține seama că dacă $m \dot{+} n = H$, $\cos \varphi(m, n) = \cos \varphi(m_1, n_1)$

Teorema 2. Fie $\{\mathfrak{N}_K\}_1^\infty$ un șir complet ω -liniar independent de subspații finite și

$$\sum_{\substack{j, K=1 \\ j \neq K}}^{\infty} \cos^p \varphi(\mathfrak{N}_j, \mathfrak{N}_K) < \infty.$$

Atunci $\{\mathfrak{N}_K\}$ este o bază p -apropiată de o bază ortogonală.

Demonstrație. Luăm numărul natural n astfel că

$$\sum_{j \neq K}^{\infty} \cos^p \varphi(\mathfrak{N}_j, \mathfrak{N}_K) < q^p < 1$$

și considerăm subspațiile

$$\mathcal{D}_K = \mathfrak{N}_n + \mathfrak{N}_{n+1} + \dots + \mathfrak{N}_K \quad (K = n, n+1, \dots)$$

$$\mathfrak{M}_K = \mathfrak{N}_K, \quad \mathfrak{M}_K = \mathcal{D}_K \ominus \mathcal{D}_{K-1} \quad (K = n+1, n+2, \dots)$$

Se consideră $\{\mathfrak{M}_K\}$ ($K = 1, 2, \dots, n-1$), $n-1$ subspații care completează $\{\mathfrak{N}_K\}_n^\infty$ la o bază ortogonală.

Fie P_K și Q_K ortoprojectori respectiv pe $\mathfrak{M}_K$ și $\mathfrak{N}_K$ ($K=1, 2, \dots$). Rezultă $|P_K - Q_K| = |P_K - Q_K|_{\mathcal{D}_K}$ deoarece pe $H \ominus \mathcal{D}_K$ ($K \geq n$), $P_K - Q_K = 0$. În baza propoziției 2, $|P_K - Q_K| = \cos \varphi(\mathfrak{N}_K, \mathcal{D}_{K-1})$ ($K = n+1, \dots$). Pentru ca $\{\mathfrak{M}_K\}_1^\infty$ și $\{\mathfrak{N}_K\}_1^\infty$ să fie p -apropiate trebuie ca să existe relația

$$\sum_{K=n+1}^{\infty} \cos^p \varphi(\mathfrak{N}_K, \mathcal{D}_{K-1}) < \infty.$$

Fie x, y axe arbitrare din subspațiile $\mathfrak{N}_K$ și $\mathcal{D}_{K-1}$. Reprezentăm vectorul y sub forma:

$$y = \sum_{j=n}^{K-1} \alpha_j x_j \quad (x \in \mathfrak{N}_j, |x_j| = 1, j = n, n+1, \dots, k-1).$$

Se obține

$$\begin{aligned} 1 &= \left| \sum_{j=n}^{K-1} \alpha_j x_j \right|^p = \sum_{l, j=n}^{K-1} (x_l, x_j)^{\frac{p}{2}} \alpha_l^{\frac{p}{2}} \bar{\alpha}_j^{\frac{p}{2}} = \sum |\alpha_j|^p + \sum_{l \neq j} (x_l, x_j)^{\frac{p}{2}} \alpha_l^{\frac{p}{2}} \bar{\alpha}_j^{\frac{p}{2}} \geq \\ &\geq \sum_{j=n}^{K-1} |\alpha_j|^p - \left(\sum_{l \neq j}^{K-1} (x_l, x_j)^p \right)^{\frac{1}{p}} \sum_{j=n}^{K-1} |\alpha_j|^p \end{aligned}$$

Cum $|(x_l, x_j)| \leq \cos \varphi(\mathfrak{N}_l, \mathfrak{N}_j)$

În baza enunțului se obține

$$1 \geq \sum |\alpha_j|^p - q \sum |\alpha_j|^p, \text{ sau } \sum |\alpha_j|^p \leq \frac{1}{1-q}$$

$$|(x, y)| = \left| \sum_{j=n}^{K-1} (x, x_j) \bar{\alpha}_j \right| \leq \sum_{j=n}^{K-1} |\alpha_j|^p \sum_{j=n}^{K-1} |(x, x_j)|^p \leq (1-q)^{-1} \sum_{j=n}^{K-1} \cos^p \varphi(\mathfrak{N}_K, \mathfrak{N}_j)$$

Deci

$$\cos^p \varphi(\mathfrak{N}_K, \mathcal{D}_{K-1}) \leq (1-q)^{-1} \sum_{j=n}^{K-1} \cos^p \varphi(\mathfrak{N}_K, \mathfrak{N}_j), \quad k \geq n.$$

Se obține în final

$$\sum_{K=n+1}^{\infty} \cos^p \varphi(\mathfrak{N}_K, \mathcal{D}_{K-1}) \leq \frac{1}{2}(1-q)^{-1} \sum_{\substack{K, j=n \\ K \neq j}}^{\infty} \cos^p \varphi(\mathfrak{N}_K, \mathfrak{N}_j) < \frac{q^p}{2(1-q)}$$

Adică ceea ce trebuia demonstrat.

Vom da o teoremă care dă o legătură între bazele unei familii de subspații din H și bazele lui H .

Teorema 3. Dacă $\{\mathfrak{N}_K\}_1^{\infty}$ este un șir complet, ω — liniar independent de subspații finite din H și dacă

$$\sum_{\substack{j, K=1 \\ j \neq K}}^{\infty} \min(n_j, n_K) \cos \varphi(\mathfrak{N}_j, \mathfrak{N}_K) < \infty \quad (n_j = \dim \mathfrak{N}_j)$$

atunci reuniunea bazelor ortonormale $\varphi_{K_1}, \varphi_{K_2}, \dots, \varphi_{K_n}$ ale subspațiilor $\mathfrak{N}_K$ ($K = 1, 2, 3, \dots$), formează o bază a lui H p -apropiată de o bază ortonormală.

Demonstrație: Fie

$$\varphi = \sum_{l=1}^{n_j} (\varphi_{K_q}, \varphi_{j_l}) \varphi_{j_l} \in \mathfrak{N}_j \quad (j, k = 1, 2, \dots; q = 1, 2, \dots, n_K)$$

Se obține

$$\cos^p \varphi(\mathfrak{N}_j, \mathfrak{N}_K) \geq |(\varphi, \varphi_{K_q})|^p = \sum_{l=1}^{n_j} |(\varphi_{K_q}, \varphi_{j_l})|^p$$

Deci

$$\sum_{q=1}^{n_K} \sum_{l=1}^{n_j} |(\varphi_{K_q}, \varphi_{j_l})|^p \leq n_K \cos^p \varphi(\mathfrak{N}_j, \mathfrak{N}_K)$$

Schimbînd rolurile lui N_j și N_K rezultă:

$$\sum_{q=1}^{n_K} \sum_{l=1}^{n_j} |(\varphi_{K_q}, \varphi_{j_l})|^p \leq \min(n_j, n_K) \cos^p \varphi(\mathfrak{N}_j, \mathfrak{N}_K)$$

Efectuînd o altă numerotare a vectorilor φ_{K_q} ($K = 1, 2, \dots; q = 1, 2, \dots, n_K$)

se obține șirul $\{\varphi_l\}_1^{\infty}$, pentru care rezultă $\sum_{\substack{j, K=1 \\ j \neq K}}^{\infty} |(\varphi_j, \varphi_K)|^p < \infty$. Deci $\{\varphi_j\}_1^{\infty}$

este o bază p -apropiată de o bază ortonormală (deoarece matricea G r a m m a vectorilor $\{\varphi_j\}$ generează un operator de clasa $\mathfrak{S}_p$ [2]).

BIBLIOGRAFIE

1. А. С. Маркус: о базисе из корневых векторов диссипативного оператора. Д. Л. Н. 132, 3, 1960.
2. В. Пригорский: О некоторых классах базисов Гильбертова пространства. У. М. Н. 5.1965.
3. И. Т. Гохберг: М. Г. Крейн. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. Москва, 1965.

Primit la redacție la 30.XI.1968.

О БАЗИСАХ ИЗ ПОДПРОСТРАНСТВ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Даются некоторые результаты, известные для $p = 2$ ([1], [3]), для случая $p \neq 2$.

SUR LES BASES DES SOUS ESPACES

R É S U M É

On donne quelques resultats connus pour $p = 2$ ([1], [3]) pour le cas $p \neq 2$.

BEITRÄGE ZUR GESCHICHTE DER STATISTIK UND IHRER ANWENDUNG IN DER BIOLOGIE WÄHREND DES VERGANGENEN JAHRHUNDERTS *

F. WEILING

A. Einleitung

Darstellungen der geschichtlichen Entwicklung einer Wissenschaft dienen vielfach dazu, wissenschaftlichen Veranstaltungen einen festlichen Charakter zu geben. Indessen kommt einer solchen Untersuchung hohe Bedeutung für das Verständnis dieser Wissenschaft selbst zu. Hinreichende Kenntnis der geschichtlichen Entwicklung vermag in vielen Fällen die Weiterentwicklung einer Wissenschaft messgeblich zu beeinflussen.

Die wissenschaftliche Statistik hat ihren Anfang im 17. und 18. Jahrhundert genommen, einmal in der Lehre von den Staatsmerkwürdigkeiten Hermann CONRINGs (1606—1681) und Gottfried ACHENWALLs (1719—1772), sodann in der „politischen Arithmetik“ John GRAUNTS (1620—1674) und anderer englischer Gelehrter, an die schliesslich die Arbeit J.P. SÜSSMILCHs (1707—1767) anknüpft, der heute als der Vater der Biometrie, d.h. der Anwendung der Statistik auf die Biologie, gilt.

Indessen ist sowohl die moderne Statistik wie die Biometrie ein Produkt des 20. Jahrhunderts. Der Begriff 'Biometrie' wurde im Jahre 1901 im Zusammenhang mit der Gründung der ersten biometrischen Zeitschrift „Biometrika“ geprägt. Er wurde jedoch bereits vor dieser Zeit, wenn auch in anderer Bedeutung verwendet. Die Entwicklung der modernen Statistik ist im wesentlichen an die Namen K. PEARSON (1857—1936), W. S. GOSSET (1876—1937), R. A. FISHER (1890—1962) u.a. geknüpft.

Es ist klar, dass diese Entwicklung nicht unmittelbar an die Situation im 17. und 18. Jahrhundert anknüpft, sondern weitgehend durch die Verhältnisse im unmittelbar vorausgegangenen 19. Jahrhundert bestimmt ist. Das 19. Jahrhundert ist somit für die Entwicklung unserer heutigen Statistik und Biometrie von grundlegender Bedeutung. Es ist daher berechtigt, dass wir uns eingehender mit ihm befassen.

* Diese Arbeit ist bei dem III-tem Kolloquium über „Wahrscheinlichkeitstheorie“ in Braşov, 2—7 September 1968 vorgetragen worden.

B. Die Entwicklung der Statistik im 19. Jahrhundert

Noch bis weit in das vergangene Jahrhundert hinein wurde die Statistik im Sinne ACHENWALL's verstanden. Nach A. L. SCHLÖZER (1735—1809) kann sie „durchweg nur als Teil“ der Politik „gedacht und behandelt werden, sonst läuft sie Gefahr, in Spielerei auszuarten“ (JOHN 1884). Sie wurde überdies in gewissem Umfang als historische Wissenschaft aufgefasst. „Statistik ist“, so sagt SCHLÖZER, „stillstehende Geschichte, Geschichte eine fortlaufende Statistik“. Äusserst scharf reagierte zu Beginn des vergangenen Jahrhunderts die Göttinger Schule gegen die immer stärkere Betonung der Zahl, wie sie in der sogenannten Tabellenstatistik und in der politischen Arithmetik zu Tage trat. Beide wurden gemeinhin als die Statistik von „Tabellenknechten und Tabellenfabrikanten“ abgetan.

a) PIERRE SIMON DE LAPLACE (1749—1827)

Unabhängig von dieser Entwicklung finden wir die mathematische Theorie der Wahrscheinlichkeitslehre im 19. Jahrhundert in Frankreich weiter ausgebaut werden. Sie wurde bekanntlich von dem Franzosen Blaise PASCAL (1623—1662) im Verein mit Pierre de FERMAT (1601—1665) begründet. Es war nun der Mathematiker, Astronom und spätere Marquis Pierre Simon de LAPLACE, an den diese Weiterentwicklung geknüpft ist; Sie liess ihn zum Begründer der modernen Wahrscheinlichkeitslehre werden (abb. 1).

In der Bretagne als Sohn eines Bauern geboren, wurde LAPLACE wegen seiner mathematischen Begabung gefördert. Er kam auf diese Weise nach Paris und wurde durch Vermittlung d'ALAMBERT's an der École Militaire zum Professor für Mathematik ernannt.

Neben zahlreichen mathematischen und astronomischen Arbeiten veröffentlichte LAPLACE 1812 seine „Théorie analytique des probabilités“, die im Jahre 1820 bereits in 3. Auflage erschien und eferner im Jahre 1814 sein „Essai philosophique sur les probabilités“. ¹⁾ in deßen Einleitung er einer faszinierenden Einblick in die Wahrscheinlichkeitslehre gibt. Den Zufall bezeichnet LAPLACE „als Ausdruck unserer Unwissenheit“ der wirklichen Verknüpfung der Ereignisse im Naturgeschehen. Ausführlich behandelt er die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Berechnung von Sterblichkeitstafeln, den Begriff der mittleren Lebensdauer sowie die Eheschliessungen.

Die Statistik erfreute sich damals in Frankreich besonders günstiger Entwicklungsbedingungen. In seiner zentralistischen Einstellung erfasste Napoleon bald ihre grosse praktische Bedeutung. Im Jahre 1799 erfolgte in Paris die Gründung eines statistischen Büros, im Jahre 1801 die erste Volkszählung. Statistiker begleiteten Napoleon auf seinen Feldzügen, so der Statistiker und Physiker Josef FOURIER (1768—1830) auf der ägyptischen Expedition, mit dem Auftrag, eine Statistik Ägyptens auszuarbeiten. Unter ähnlichen Bedingungen erschien im Anschluss an den durch die Schlacht bei Austerlitz (1805) bekannten Feldzug von einem Begleiter Napoleons mit Namen Josef HAZZI eine „Statistik Mährens“ (1807).

Zu erwähnen ist ferner, dass LAPLACE ebenso wie DE MOIVRE (1667—1754) die Binomialverteilung für grosse n untersucht und durch eine stetige Verteilung angenähert hat, die im Falle $p = q$ unserer heutigen Normalverteilung entspricht.

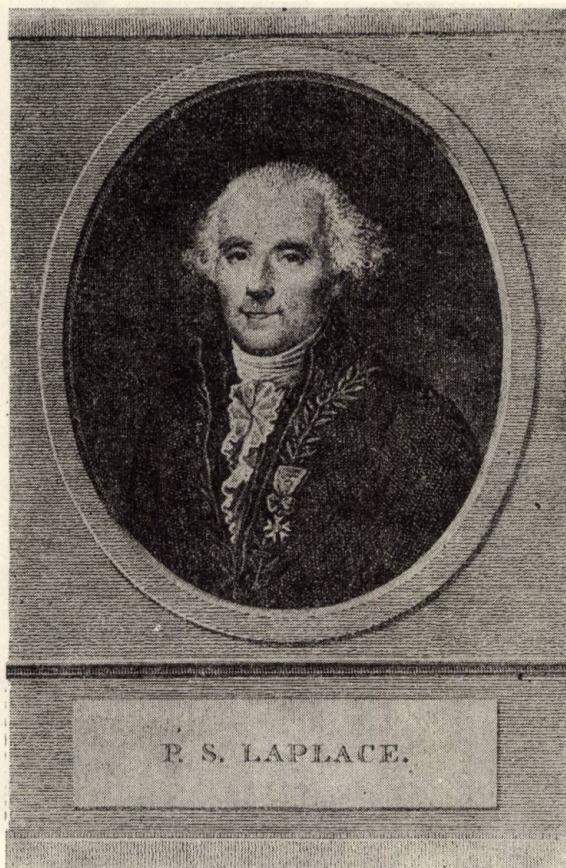


Abb. 1

b) **KARL FRIEDRICH GAUSS** (1777—1855)

Die zweite, hier zu erwähnende und für die Entwicklung der Statistik bedeutsame Persönlichkeit ist Karl Friedrich GAUSS (Abb. 2)

Im Jahre 1777 in Braunschweig als Sohn armer Eltern geboren, lenkte GAUSS durch aussergewöhnliche mathematische Begabung frühzeitig die Aufmerksamkeit und Gunst des Landesfürsten auf sich. Dieser ermöglichte ihm ein Gymnasial- und Hochschulstudium sowie anschliessend sorgenfreie wissenschaftliche Arbeit. Nach dem Tode seines Gönners (1806) wurde GAUSS im Jahre 1807 zum Direktor des Göttinger Observatoriums ernannt, das er bis zu seinem Tode (1855) leitete.

GAUSS wird vielfach als Fürst der Mathematik bezeichnet. Er war zur gleichen Zeit ein ausgezeichneter theoretischer und angewandter Mathematiker, der sich überdies hervorragend in der Astronomie, in der Geodäsie und in der mathematischen Physik auskannte. Besonderes Interesse wird

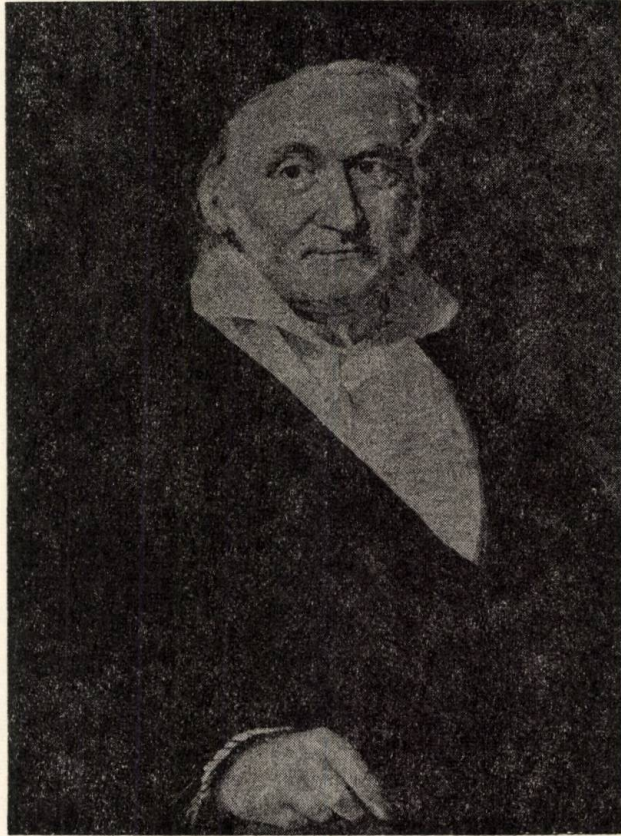


Abb. 2

ihn auch für die Statistik, die Versicherungsmathematik und für die politische Arithmetik nachgesagt. Überdies war er ein ausgezeichneter Sprachkenner. Selbst neuere Wissenschaften, einschliesslich Botanik und Mineralogie, waren sein Steckenpferd (BEILL 1967, S. 252).

Von grundlegender Bedeutung für die moderne Statistik ist seine „Methode der kleinsten Quadrate“. Mit ihrer Hilfe wird der Mittelwert als der „wahrscheinlichste Wert“ aus einer grösseren Anzahl von Einzelbeobachtungen herausgestellt. Gleichzeitig wird festgestellt, dass der Mittelwert den kleinsten mittleren Fehler aufweist. R. A. FISHERs, Maximum Likelihood-Methode beruht weitgehend auf der Methode der kleinsten Quadrate.

GAUSS fand diese Methode bereits mit 18 Jahren im Jahre 1795. Er veröffentlichte sie jedoch nicht. So wurde sie erst auf Grund einer Arbeit

LEGENDRE (1752—1833) bekannt, der sie im Jahre 1806 fand und publizierte.

Der Beschäftigung mit den eben geschilderten Fragen entsprang auch das Bemühen GAUSS um die Theorie der Beobachtungsfehler. Dabei fand GAUSS die normierte Form der bereits erwähnten, von DE MOIVRE und LAPLACE beschriebenen Normalverteilung. Sie ist als GAUSSsche Fehlerfunktion oder GAUSSsche Fehlerverteilung allgemein bekannt.

c) ADOLPHE QUETELET (1796—1874)

Die dritte Persönlichkeit, die in diesem Zusammenhang erwähnt werden muss, ist Adolphe QUETELET (abb. 3.). Im Jahre 1796 in Gent geboren, wurde QUETELET bereits mit 18 Jahren am Gymnasium seiner Heimat-



Abb. 3

stadt zum Lehrer der Mathematik ernannt. Nach erfolgter mathematischer Promotion an der neugegründeten Universität seiner Heimatstadt (1819) wurde er an das Athenäum nach Brüssel berufen und gleichzeitig zum wirklichen Mitglied der dortigen Akademie ernannt.

In Brüssel wandte sich QUETELET dem Studium der Physik und Astronomie zu. Auf seine Initiative hin wurde die Sternwarte gegründet,

deren Leitung er im Jahre 1832 übernahm. Überdies setzte sich QUETELET schon bald sehr für die Entwicklung der Meteorologie ein. Auf seine Bemühungen hin kam während der Wiener Weltausstellung vom Jahre 1873 ein internationaler meteorologischer Kongress zustande, an dem er jedoch aus Krankheitsgründen nicht mehr teilnehmen konnte. Wenige Monate später verstarb er, im Februar des Jahres 1874.

QUETELET's statistische Erkenntnisse sind vor allem niedergelegt in seiner Arbeit: „Sur l'appréciation des documents statistiques, et en particulier sur l'appréciation des moyennes“ vom Jahre 1845, (Abb. 4), ausserdem in seinen Briefen, die unter dem Titel „Letters on the Theory of Probabilities, as Applied to the Moral and Political Sciences“¹ im Jahre 1849 in englischer Übersetzung von O. G. DOWNES in London erschienen sind.

QUETELET unterscheidet konstante, variable und zufällige Ursachen. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses stellt nach ihm einen Bruch dar, dessen Zähler durch die Zahl der günstigen, dessen Nenner durch die Gesamtzahl der möglichen Ereignisse gegeben ist.

Entnimmt man, so stellt er fest, aus einer Urne mit schwarzen und weissen Kugeln nur einige wenige Kugeln, so mag das beobachtete Zahlen-

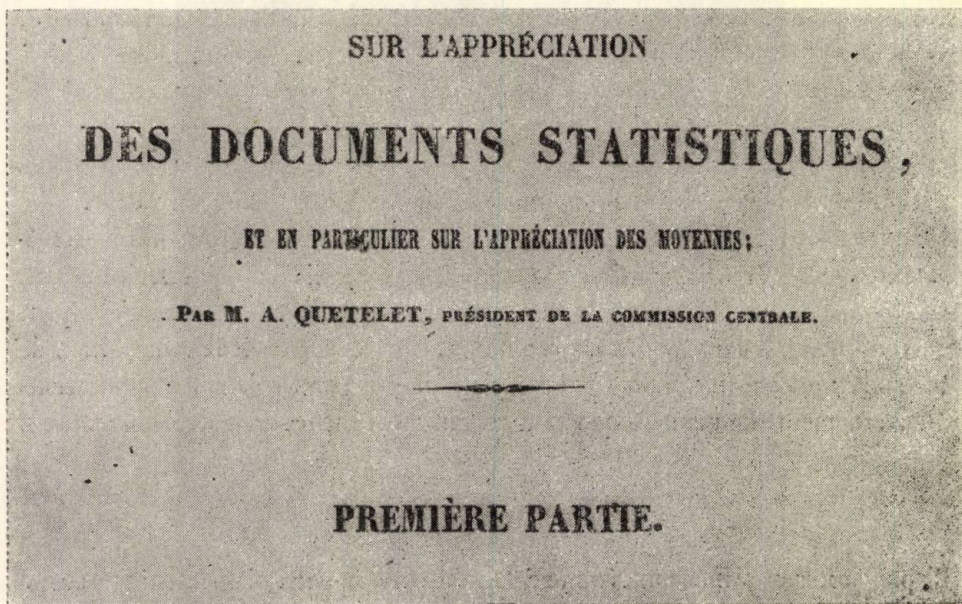


Abb. 4

verhältnis aus zufälligen Gründen beträchtlich von dem Zahlenverhältnis in der Urne selbst abweichen. Bei einer grossen Anzahl derartiger Versuche erhält man jedoch schliesslich ein Zahlenverhältnis, das weitgehend

¹ Der französische Titel lautet: „Lettres à S.A.R. le Duc Regnant de Saxe Cobourg et Gotha sur la Rhéorie des Probabilités appliquée aux Sciences morales et politiques“. Bruxelles 1864.

dem der Kugeln in der Urne entspricht. Umgekehrt lässt sich aus derartigen Versuchen das unbekannte Zahlenverhältnis der Kugeln in der Urne erschliessen. Die Übereinstimmung mit dem wahren Zahlenverhältnis wächst proportional mit der Quadratwurzel der Zahl der Einzelversuche.

Die Summe der Wahrscheinlichkeiten, mit denen der Urne eine schwarze oder eine weisse Kugel entnommen wird, beträgt, wie QUETELET feststellt, den Wert 1. Er sucht ferner die Gesetzmässigkeit festzustellen, nach der die Zahl der schwarzen und weissen Kugeln verteilt ist, wenn einer Urne mit gleich viel schwarzen und weissen Kugeln (mit Zurücklegen) jeweils eine, zwei, drei oder vier Kugeln entnommen werden. Auf Grund seiner Beobachtungen folgert er, dass die Zahl der schwarzen und weissen Kugeln der Verteilung der Koeffizienten einer Binomialverteilung folgt. Jedoch unterliegt das Ergebnis des einzelnen Zuges zahlreichen Zufälligkeiten und nur bei einer hinreichend grossen Zahl von Einzelzügen nähert es sich der theoretischen Verteilung.

QUETELET prüft diese Übereinstimmung, indem er aus einer Urne mit 40 schwarzen und ebensoviel weissen Kugeln in 4096 Einzelzügen je eine Kugel mit Zurücklegen entnimmt. Er registriert das Ergebnis und fasst nach und nach die Einzelzüge unter Berücksichtigung aller möglichen Kombinationen zu 2, 3 usw. bis schliesslich zu 12 zusammen.

Er untersucht alsdann die Zufallsverteilung unter der Voraussetzung, dass einer Urne eine endlos grosse Zahl von Proben entnommen wird, die ihrerseits aus einer endlos grossen Zahl von Kugeln bestehen. Für den Fall, dass die Einzelprobe jeweils 999 Kugeln enthält, berechnet er eine Tabelle dieser Verteilung und stellt dieselbe graphisch dar.

Bei Anwendung der Zufallsverteilung auf wissenschaftliche Beobachtungen geht QUETELET nicht nur auf die Bedeutung des Mittelwertes, sondern auch der Streuung ein. Er bedient sich dabei des wahrscheinlichen Fehlers, kennt jedoch auch die Standardabweichung, deren Beziehung zum wahrscheinlichen Fehler er angibt.

C. Die Anwendung der Statistik auf biologische Fragestellungen im 19. Jahrhundert

Wir haben LAPLACE, GAUSS und QUETELET als diejenigen Persönlichkeiten herausgestellt, die zur Entwicklung unserer modernen Statistik im vergangenen Jahrhundert wohl den nachhaltigsten Beitrag geliefert haben.

Wenden wir uns nunmehr der Frage zu, welche Persönlichkeiten die bis dahin bekannten statistischen Prinzipien in besonders wirkungsvoller Weise auf biologische Fragestellungen angewandt haben, so ist an erster Stelle erneut QUETELET zu nennen. An zweiter und dritter Stelle verdienen J. G. MENDEL und Francis GALTON Erwähnung.

a) ADOLPHE QUETELET

QUETELET hat seine statistischen Kenntnisse vornehmlich auf das Studium der Anthropologie, zum Teil aber auf Fragen der Pflanzenphysiologie und der Meteorologie angewendet. Die Begriffe des Durchschnitts-

SUR L'HOMME

ET LE

DÉVELOPPEMENT DE SES FACULTÉS,

OU

ESSAI DE PHYSIQUE SOCIALE;

PAR A. QUETELET,

Secrétaire perpétuel de l'Académie royale de Bruxelles, Correspondant de
l'Institut de France, de la Société royale astronomique de Londres, des
Académies royales de Berlin, de Turin, etc.

Appliquons aux sciences politiques et morales la méthode fondée sur l'observation et sur le calcul, méthode qui nous a si bien servi dans les sciences naturelles.

LAFAYE, *Essai ph. sur les probabilités.*

TOME PREMIER.

PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE,
QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

1835

173 D.
Abb. 5

schen, des „homme moyen“, und der Moralstatistik wurden von ihm geprägt. Seine wesentlichen Gedanken sind in den Arbeiten „Sur l'homme“ vom Jahre 1835, (abb. 5), den „Recherches statistiques sur le Royaume de Pais-Bas“, ferner in den „Recherches sur le penchant au crime aux different âges“ („Nouveaux memoires“, Vol. 5 und 7) 1829 und 1831, schliesslich in seiner „Statistique morale“ vom Jahre 1847 (Abb. 6) und in anderen Arbeiten niedergelegt.

Nach QUETELET unterliegt auch der Mensch in allen seinen Eigenschaften zufälligen Einflüssen. Die wirklichen Verhältnisse sind daher auch bei ihm durch den Mittelwert gegeben. Der „Durchschnittsmensch“ (homme moyen) stellt den eigentlichen Menschentyp einer Nation dar.

QUETELET untersucht in diesem Zusammenhang die Brustkastenmasse von 5 738 schottischen Soldaten, ferner die Länge von 100 000 französischen Rekruten. Der Durchschnittsmensch ist nach ihm das Resultat konstanter, die Abweichungen hingegen das Ergebnis zufälliger Ursachen, eine Feststellung, die anschliessend auf alle physischen, intellektuellen und moralischen Eigenschaften des Menschen ausgedehnt wird. In seinen „Systeme sociale“ vom Jahre 1848 sowie zum Teil in seiner „Anthropométrie“ vom Jahre 1870 hat QUETELET diese Gedanken weiter ausgeführt (Abb 7).

Von besonderem Interesse sind QUETELETs Vorstellungen über die Betätigungen des Menschen auf moralischem Gebiet. Er untersucht die Häufigkeit von Verbrechen, Eheschliessungen sowie Selbstmorden und stellt fest, dass diese Ereignisse mit grosser Regelmässigkeit alljährlich wie-

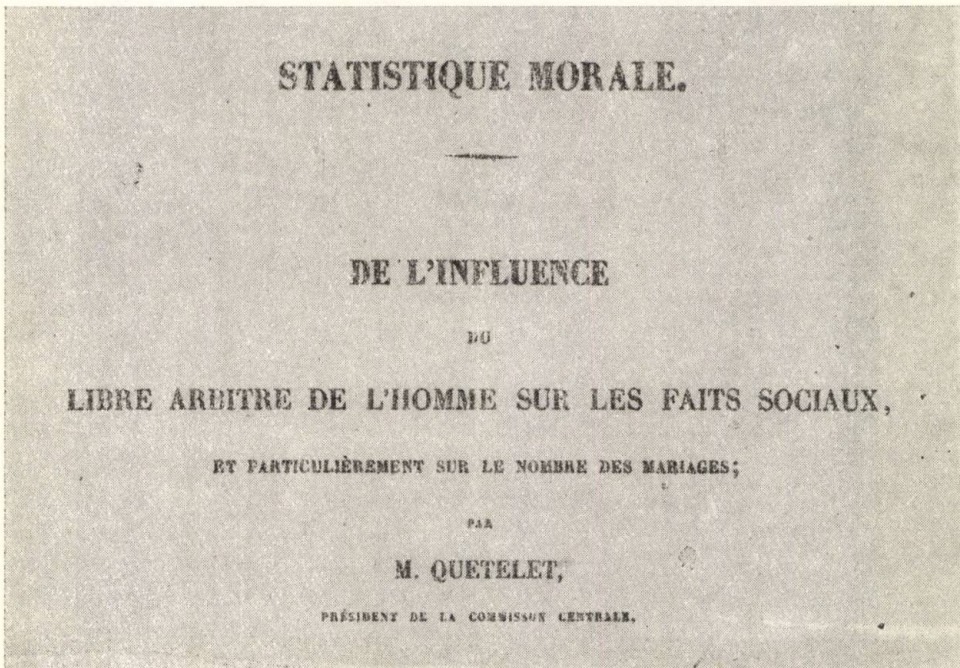


Abb. 6

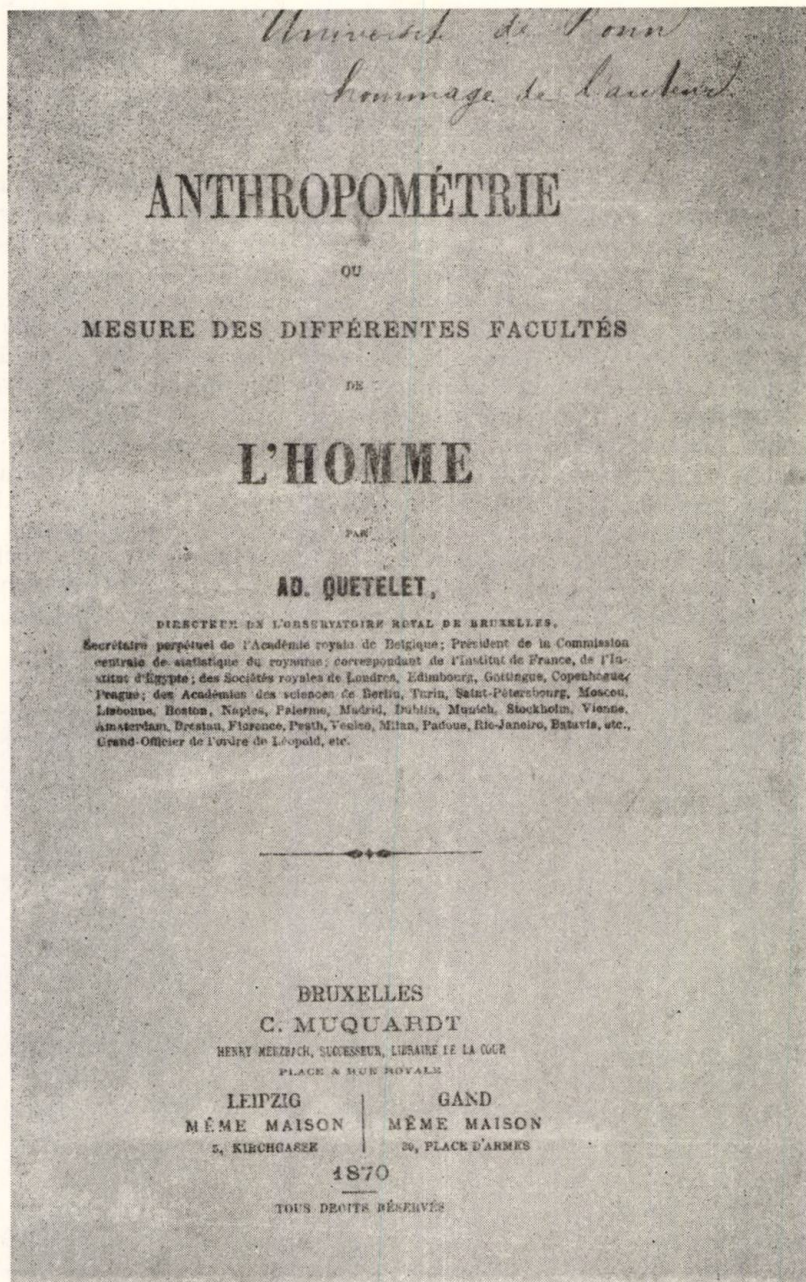


Abb. 7

derkehren. Die Konstanz und Ordnung, mit der Verbrechen sich wiederholen, veranlasst ihn zum Ausspruch:

„Es gibt ein Budget der Gefängnisse, der Galeeren und des Schafotts, welches wir jährlich mit einer grösseren Regelmässigkeit entrichten als jenes der Finanzen“....
 „Die Gesellschaft schliesst die Keime der Verbrechen in sich. Jeder soziale Zustand hat eine bestimmte Zahl und Ordnung von Delikten zur Folge; dieselben erscheinen als die notwendige Konsequenz seiner Organisation“.

Den Hang zum Verbrechen definiert QUETELET als die Wahrscheinlichkeit, ein Delikt zu begehen, gegeben als den Quotienten, gebildet aus der Zahl der unter gleichen Umständen Geborenen und der Zahl jener, welche aus diesen zu Verbrechern wurden. Ähnlich spricht er von einer „tendance au marriage“. Er untersucht die Abhängigkeit jener Verhältniszahl von verschiedenen äusseren Umständen: von Alter, Jahreszeiten, Klima, Rasse, Beschäftigung u.s.w., und kommt zum Schluss, dass es nicht möglich sei, alle Ursachen der Verbrechen aufzuführen.

QUETELET ist der Begründer der Moralstatistik. In seiner letzten Deutung der hier obwaltenden Verhältnisse ist er jedoch nicht klar. Er kann sich nicht entscheiden, ob physikalische oder soziologische Ursachen die beobachteten Erscheinungen erklären. Seine Konzeption ist daher in gewissem Umfang fatalistisch.

b) JOHANN GREGOR MENDEL (1822—1884)

Den bedeutendsten Erfolg auf biologischem Gebiet hat die konsequente Anwendung der damals bekannten statistischen Prinzipien im Werk



Abb. 8

J. G. MENDELs gefunden (Abb. 8). Ihm ist es mit ihrer Hilfe gelungen, die Gesetzmässigkeiten des Vererbungsgeschehens aufzuhellen, um deren Klärung man sich zu jener Zeit vielfach bemüht hat. Das den meisten

Biologen Neue und Unbekannte dieser Methodik ist wohl auch dafür verantwortlich zu machen, dass MENDELs Entdeckung zu seinen Lebzeiten nicht in ihrer Bedeutung erkannt und beachtet wurde.

J. G. MENDEL ist im Jahre 1822 in Heizendorf Schlesisch Mähren geboren, Als Augustinerpater versah er in Brunn die Aufgaben eines supplierenden Realschullehrers, nachdem er infolge unglücklicher Umstände zweimal im staatlichen Lehrbefähigungsexamen durchgefallen war. Seine grundlegenden Erbsenversuche, die Vorversuche eingerechnet, dauerten von 1854 bis 1863. Anfang des Jahres 1865 hat er in zwei Vorträgen über sie berichtet. MENDEL starb im Jahre 1884 als Abt seines Kloster in Altbrunn.

Ziel der MENDELschen Versuche war es, „ein allgemein gültiges Gesetz für die Bildung und Entwicklung der Hybriden aufzustellen.“ Es war MENDEL bekannt, dass er dieses Ziel nur über „Detilversuche“ erreichen konnte, wobei die Versuchspflanzen gewisse Bedingungen erfüllen mussten, die wir heute als Repräsentativitätsbedingungen von Stichproben bezeichnen würden. MENDEL wusste, dass die Einzelversuche zufälligen Einflüssen unterliegen, die sich nur über die Mittelwerte aus hinreichend grossen Stichproben eliminieren lassen. Je grösser die Zahl der einem Mittelwert zugrunde liegenden Einzelpflanzen ist, desto gewichtiger ist nach MENDEL die Aussagekraft dieses Versuches.

c) FRANCIS GALTON (1822—1911)

Im gleichen Jahr wie J. G. MÉNDEL (1822) ist Francis GALTON, ein Vetter von Charles DARWIN, geboren (abb. 89). GALTON ist die dritte Persönlichkeit von Rang, die hier zu nennen ist. Er hatte zunächst als Geograph mehrere grössere Reisen, insbesondere in den afrikanischen Raum, unternommen. Über die Geographie wandte er sich der Anthropologie sowie Fragen der Vererbungswissenschaft zu. Beide Wissenschaften brachten ihn mit statistischen Problemen und Methoden in Berührung. GALTON ist Begründer der Eugenik und der Zwillingsforschung. Er erkannte die Bedeutung der Fingerleisten als menschliches Erkennungsmerkmal.

GALTON hat zahlreiche statistische Schriften verfasst. In seinem Handbuch „Notes and Queries on Anthropology etc.“ (1874) schlägt er vor, die bei den einzelnen Individuen untersuchten Merkmale ihrem Wert nach rangmässig zu ordnen und unter 1000 auf diese Weise ausgewerteten Individuen das 500., d.h. das mittelste, ferner das 250. sowie das 750. festzuhalten. GALTON ermittelte auf diese Weise nicht nur den Median und die Ogive, d.h. die graphische Darstellung der Verteilungsfunktion. In einer späteren Arbeit („Statistics by Intercomparisons with Remarks on the Law of Frequency of Error“ (1875)) stellt er die aus 17 Elementen gewonnene Binomial-Ogive der aus 999 Elementen gewonnenen Verteilungsfunktion QUETELETs gegenüber. Im Verlauf seiner genetischen Studien erfolgte auch die Konstruktion seines als „Quincunx“ bezeichneten Zufallsapparates zur Demonstration der binomialen Verteilung von Variablen.

Auf GALTON gehen überdies die Regressions- und die Korrelationsanalyse zurück. Er verwendete im Jahre 1875 als erster die Regressionsgerade

zum Vergleich des Samendurchmessers von Wickensamen bei Mutter- und Tochterpflanzen. Auch die Korrelationsanalyse geht auf Probleme des Vererbungsgeschehens zurück. GALTON weist darauf hin, dass ein Merkmal eines Menschen nicht ausschliesslich durch dessen Vater bedingt ist. Und neben den genetischen spielen auch Umweltfaktoren eine Rolle. Das betreffende Merkmal



Abb. 9

ist daher mit dem des Vaters korreliert. Ferner sind die Grösse sowie andere Eigenschaften zweier Organe oder Glieder eines Organismus miteinander korreliert. Den Regressions- und Korrelationskoeffizienten GALTONs liegen jedoch noch nicht die heute üblichen Formeln zugrunde. Sie basieren noch nicht auf den Erwartungswerten, sondern auf den Quantilen.

GALTON trug sich bereits mit dem Gedanken, ein Institut für angewandte Statistik zu gründen. Die Voraussetzungen für die Gründung eines Lehrstuhles für Eugenik hat er bekanntlich geschaffen. Er war somit in ganz vorzüglicher Weise zum Mitbegründer der Biometrie prädestiniert.

d) DIE QUELLEN DER STATISTISCHEN KENNTNISSE BEI MENDEL UND GALTON

Es ist hier abschliessend von Interesse, nach den Quellen der statistischen Kenntnisse bei jenen beiden Persönlichkeiten zu fragen, die selbst von Haus aus nicht Mathematiker waren: MENDEL und GALTON.

Bei Letzterem ist diese Frage wohl am einfachsten zu klären. Er scheint wesentlich von QUETELET beeinflusst zu sein, obwohl er in manchen Punkten, so in der Korrelations- und Regressionsanalyse, durchaus selbständig gearbeitet und gar zur Weiterentwicklung der Statistik wichtige Beiträge geliefert hat. Mit Sicherheit scheint er von QUETELETs Arbeiten wohl nur dessen Briefe (*Letters on the Theory of Probabilities, as Applied to the Moral and Political Sciences*) in der englischen Übersetzung von O. G. DOWNES (London 1849) gelesen zu haben.

Auch bei MENDEL wird, z. B. FISHER, eine Abhängigkeit von QUETELET als möglich angenommen. Indessen vermochte ich eine solche bei wiederholten Studienaufenthalten in Brünn, in deren Verlauf mir eine ganze Reihe bislang nicht bekannter und für die MENDEL forschung wichtiger Quellen zugänglich wurde, nicht nachzuweisen. Im Gegenteil: Es zeigte sich ziemlich eindeutig, dass MENDEL seine statistischen Kenntnisse auf Grund seiner Tätigkeit als Meteorologe gewonnen hat (WEILING 1968, dorthin weitere Literatur).

In Brünn wurde die Meteorologie seit Beginn des vergangenen Jahrhunderts sehr gepflegt. Man arbeitete mit Durchschnittswerten und wusste um das Gesetz der grossen Zahl (wenn es auch als solches nicht bezeichnet wurde), lange bevor QUETELET seine massgeblichen Arbeiten geschrieben hat.

Wichtig erscheint hier die Feststellung, dass sowohl QUETELET, wie MENDEL und GALTON sich meteorologisch betätigt haben. Neben der Astronomie und der Bevölkerungsentwicklung war es in der Tat die Meteorologie, die schon recht frühzeitig die Notwendigkeit statistischer Arbeit erkannt und bewusst gepflegt hat. Die Meteorologie war damals noch ein Teil der Physik, die sich bekanntlich bereits früher um exakte Verfahrensweisen bemüht hat.

D. Schluss

Aus Zeitgründen konnte in den vorliegenden Ausführungen nur schlaglichtartig ein Einblick in die Entwicklung der Statistik und ihrer Anwendung auf biologische Fragestellungen gegeben werden.

Schon dieser kurze Überblick zeigt jedoch, dass die Statistik als datenverarbeitende Methode bereits im vergangenen Jahrhundert sehr gepflegt worden ist. Damit werden in etwa auch die erstaunlichen Fortschritte verständlich, die Statistik und Biometrie in der ersten Hälfte dieses Jahrhunderts genommen haben.

Insbesondere sind es QUETELET und GALTON gewesen, deren Tätigkeit die nachhaltigste Wirkung auf die weitere Entwicklung gehabt hat. Völlig unabhängig von beiden hat allem Anschein nach J. G. MENDEL gearbeitet. Es war wohl zu einem guten Teil die im vergangenen Jahrhundert noch einen Teil der Physik ausmachende Meteorologie, welche für die Ent-

wicklung der Statistik und ihre Anwendung damals von nicht geringer Bedeutung gewesen ist. Auch hier zeigt sich wieder, dass die Entwicklung in den Naturwissenschaften vielfach nicht geradlinig verläuft, sondern an den Ausbau einer Randwissenschaft gebunden ist.

L I T E R A T U R

- Bell, E. T.: *Die grossen Mathematiker*. Düsseldorf — Wien 1967
- John, V.: *Geschichte der Statistik*. Stuttgart 1884
- Hankins, F. H.: *Adolphe Quetelet as Statistician*. Diss. Columbia Univ. 1908.
- Mailly, E.: *Essay sur le vie et les onorages de Quetelet*. Ann. Acad. Roy. Sc., etc. Belg (Brüssel 1875) 41, 109—297.
- *Notice sur Adolph Quetelet* Bull Acad. Roy. Sc. Belg., Brüssel 38, 816—844 (1875)
- Pearson, K.: *The Life, Letters and Labours of Francis Galton*. 3 Bde. Cambrigje 1914—1930.
- Weiling, F.: J. G. Mendel als Statistiker und Biometriker sowie die Quellen seiner statistischen Kenntnisse. Hannover 1968 (im Druck).
- Anwendung statistischer Verfahrensweisen während des vergangenen Jahrhunderts in Brünn, im Hinblick auf die Benutzung derartiger Verfahren durch J. G. Mendel. Acta universitatis agriculturae (in Vorbereitung).

In der Redaktion am 10.I.1969.

Redactor: ȘTEFANIA BARBU
Tehnoredactor: MIHAIL GEORGESCU

Analele Universității București
MATEMATICĂ — MECANICĂ
Anul XVIII — nr. 1 — 1969

ANALELE UNIVERSITĂȚII BUCUREȘTI

MATEMATICĂ—MECANICĂ

ANUL XVIII — Nr. 2/1969

MATEMATICĂ-MECANICĂ

COMITETUL DE REDACȚIE

Redactor responsabil: Acad. prof. *Miron Niculescu*

Membri: Acad. prof. *Caius Iacob*; Acad. prof. *Gh. Vrănceanu*;
prof. dr. docent *Gh. Galbură*; prof. dr. *George Ciucu*;
prof. dr. docent *Romulus Cristescu*; prof. dr. docent
Ciprian Foiaș; prof. dr. *Viorica Ionescu-Cazimir*; prof.
dr. docent *Cabiria Andreian Cazacu*

Secretar: Conf. dr. *P. P. Teodorescu*

REDACȚIA

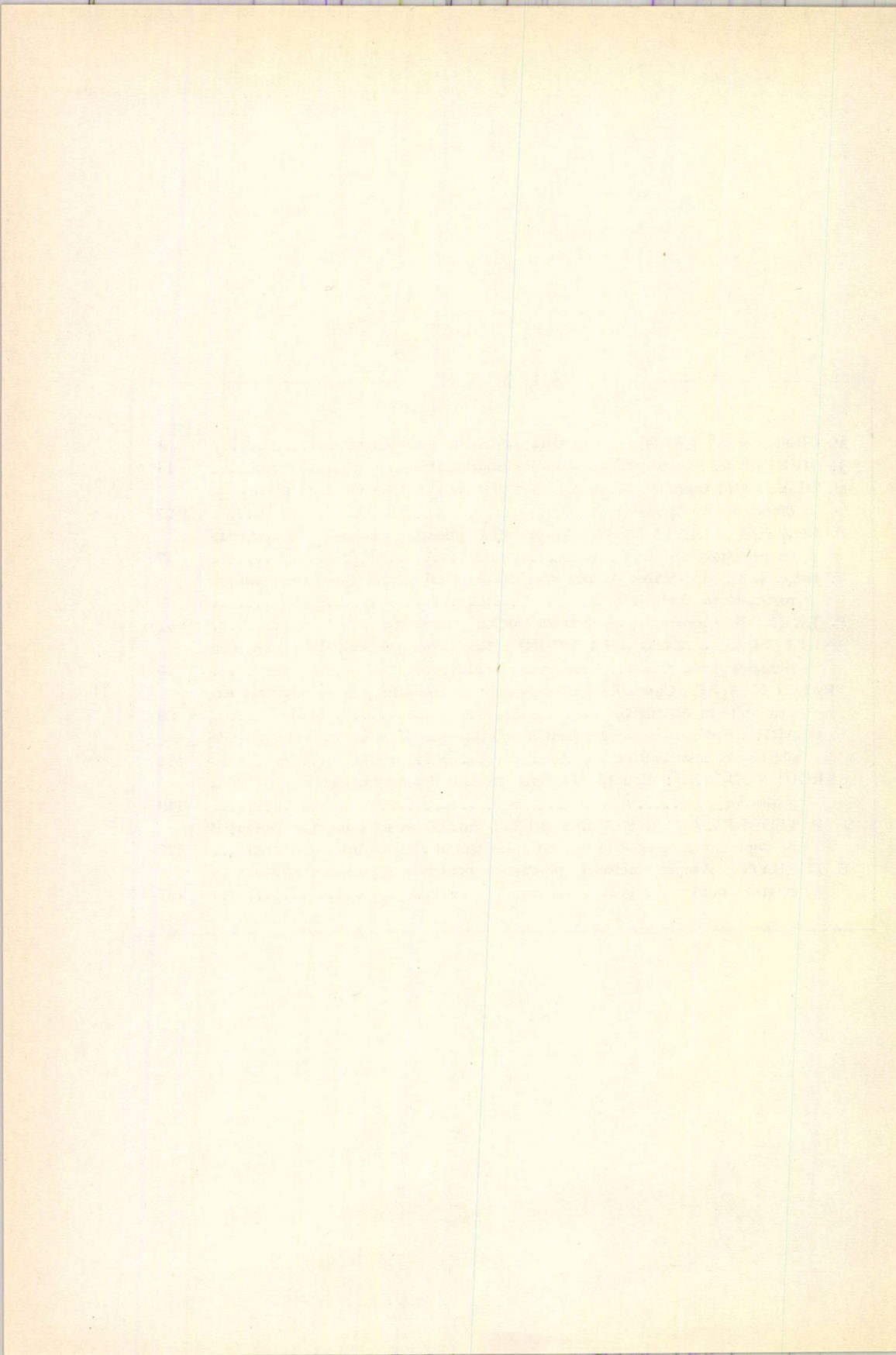
ANALELE UNIVERSITĂȚII BUCUREȘTI

B-dul Gh. Gheorghiu Dej Nr. 64

Telefon 16 01 87/5

S U M A R

	Pag.
M. CRAIU și V. CRAIU: Repartiția Dirichlet generalizată	9
J. DIEUDONNÉ: Considerații asupra lui Bourbaki*).....	13
M. DRĂGANU: Considerații asupra ecuațiilor de dispersie ale unei plasmă cu două curenți opuse	27
D. FIRESCU și ANETA MUJA: Asupra unei aplicații a sistemelor de așteptare cu prioritate absolută	37
V. ILLE și G. BÂRSAN: Asupra stabilității plăcii plane trapezoidale simplu rezemată pe toate laturile	49
P. JANIN: Fundamentele algebrizării logicii trivalente	57
ANETA MUJA și ANTONETA DOBRE: Un model probabilistic în cinetica fluidelor dense	89
TRAIAN NOAGHI: Curburile unei suprafețe în anumite puncte singulare exprimabile în distribuții	99
V. OLARIU: Teoreme de medie pentru soluțiile ecuațiilor cu derivate parțiale ale teoriei distribuțiilor	111
SERGIU RUDEANU: Ecuații booleene pentru descompunerea cromatică a grafurilor	119
P. P. TEODORESCU: Considerații privind introducerea funcțiilor potențial de deplasare în probleme în spațiu ale teoriei elasticității (caz static)....	127
S. TURBATU: Asupra metodei parabolice pentru curgerea nestaționară în stratul limită	137



СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
М. КРАЮ и В. КРАЮ: Обобщенное распределение Дирихле	11
Ж. ДИЕУДОННЕ: Некоторые соображения в работах Бурбаки	13
М. ДРЭГАНУ: Некоторые соображения об уравнениях дисперсии плазмы с двумя противоположными течениями	27
Д. ФИРЕСКУ и АНЕТА МУЖА: Применение систем массового обслуживания с абсолютным приоритетом	47
В. ИЛЛЕ и Г. БЫРСАН: Обустойчивости плоской трапезоидальной пластинки свободно оперты по конттуру	49
П. ЖАНИН: Основы алгебраизации тривалентной логики	57
АНЕТА МУЖА и АНТОНЕТА ДОБРЕ: Об одной математической модели ки- нетики густых жидкостей	97
ТРАЯН НОАГИ: Кривизны поверхностей в некоторых особых точках, выра- женные через функции распределения	109
В. ОЛАРИУ: Теоремы о средних для решения уравнений с частными производ- ными теории обобщенных функций	111
СЕРДЖУ РУДЕАНУ: Булевы уровнения для кроматического разложения графов	119
П. П. ТЕОДОРЕСКУ: Соображения касающиеся введения функции потенциал перемещения в пространственных задачах теории упругости (случай равновесия)	127
С. ТУРБАТУ: О парабоидальном методе для неустрановившиегося движения в пограничном слое	137

S O M M A I R E

	Page.
M. CRAIU et V. CRAIU: The Generalized Dirichlet Repartition	11
J. DIEUDONNÉ: Regards sur Bourbaki	13
M. DRĂGANU: Remarques sur les équations de dispersion d'un plasma à deux courants opposées	27
D. FIRESCU et ANETA MUJA: Sur une application de la théorie des files d'attente à priorité absolue	48
V. ILLE und G. BÂRSAN: Über die Stabilität der Allseitig frei Drehbar gelagerten trapezplatte	49
P. JANIN: Bases de l'algebrisation de la logique trivalente	57
ANETA MUJA et ANTONETA DOBRE: Un modèle probabilistique dans la cinétique des fluides denses	97
TRAIAN NOAGHI: Les courbures d'une surface dans certains points singuliers exprimables par des distributions	109
V. OLARIU: Théorèmes de moyenne pour les solutions des équations aux dérivées partielles et la théorie des distributions	111
S. RUDEANU: Boolean Equations for the Chromatic Decomposition of Graphs	119
P. P. TEODORESCU: Considérations concernant l'introduction des fonctions potentiel de déplacement dans les problèmes en espace de la théorie de l'élasticité (cas statique)	127
S. TURBATU: Zur parabolische Methode in der Schallnahen, instationären Strömung	137

REPARTIȚIA DIRICHLET GENERALIZATĂ

M. CRAIU și V. CRAIU

Fie $x_1, x_2, \dots, x_{k+1}$ variabile aleatoare independente care au repartițiile gamma generalizate

$$f(x_i, a_i, \alpha_i, \beta_i) = \frac{\alpha_i}{(a_i)^{\beta_i/\alpha_i} \Gamma(\beta_i/\alpha_i)} x_i^{\beta_i-1} \exp\left(-\frac{x_i^{\alpha_i}}{a_i^{\alpha_i}}\right).$$

$$x_i > 0, \alpha_i > 0, \beta_i > 0$$

Fie

$$y_i = \frac{x_i}{x_1 + \dots + x_{k+1}}, \quad i = 1, \dots, k$$

Ne propunem să determinăm repartiția vectorului $(y_1, \dots, y_k)$, pe care o vom numi *repartiția Dirichlet generalizată*.

Repartiția lui $(x_1, \dots, x_{k+1})$ este

$$\prod_{i=1}^{k+1} f(x_i) = \prod_{i=1}^{k+1} \frac{\alpha_i}{(a_i)^{\beta_i/\alpha_i} \Gamma(\beta_i/\alpha_i)} x_i^{\beta_i-1} \exp\left(-\frac{x_i^{\alpha_i}}{a_i^{\alpha_i}}\right).$$

Se face schimbarea de variabile

$$x_1 + \dots + x_{k+1} = z$$

$$x_1 = y_1 z$$

$$x_2 = y_2 z$$

$$\vdots$$

$$x_k = y_k z, \quad y_i \geq 0, \quad y_1 + y_2 + \dots + y_k \leq 1.$$

Cu aceasta repartiția lui $(y_1 \dots y_k)$ devine

$$h(y_1, \dots, y_k) = A \int_0^\infty \prod_{i=1}^k y_i^{\beta_i-1} z^{\sum_{i=1}^{k+1} \beta_i-1} (1-y_1-\dots-y_k)^{\beta_{k+1}-1} \times$$

$$\times \exp\left(-\left(\frac{y_1 z}{a_1}\right)^{\alpha_1} - \left(\frac{y_2 z}{a_2}\right)^{\alpha_2} - \dots - \left(\frac{y_k z}{a_k}\right)^{\alpha_k} - \left(\frac{z(1-y_1-\dots-y_k)}{a_{k+1}}\right)^{\alpha_{k+1}}\right) dz$$

unde

$$A = \prod_{i=1}^{k+1} \frac{\alpha_i}{a_i^{\beta_i/\alpha_i} \Gamma(\beta_i/\alpha_i)}$$

sau,

$$\begin{aligned} h(y_1, \dots, y_k) &= \prod_{i=1}^{k+1} \frac{\alpha_i}{a_i^{\beta_i/\alpha_i} \Gamma(\beta_i/\alpha_i)} \cdot \prod_{i=1}^k y_i^{\beta_i-1} (1-y_1-\dots-y_k)^{\beta_{k+1}-1} \times \\ &\times \int_0^\infty z^{\sum_{i=1}^{k+1} \beta_i - 1} \exp - \left(\left(\frac{y_1 z}{a_1} \right)^{\alpha_1} + \left(\frac{y_2 z}{a_2} \right)^{\alpha_2} + \dots + \left(\frac{y_k z}{a_k} \right)^{\alpha_k} + \right. \\ &\left. + \left(\frac{z(1-y_1-\dots-y_k)}{a_{k+1}} \right)^{\alpha_{k+1}} \right) dz. \end{aligned}$$

În cazul particular în care

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{k+1} = 1$$

$$a_1 = a_2 = \dots = a_{k+1} = 1$$

se obține

$$\begin{aligned} h(y_1, \dots, y_k) &= \frac{1}{\Gamma(\beta_1) \dots \Gamma(\beta_{k+1})} \prod_{i=1}^k y_i^{\beta_i-1} (1-y_1-\dots-y_k)^{\beta_{k+1}-1} \times \\ &\times \int_0^\infty z^{\sum_{i=1}^{k+1} \beta_i - 1} e^{-z} dz \end{aligned}$$

sau

$$h(y_1, \dots, y_k) = \frac{\Gamma(\beta_1 + \dots + \beta_{k+1})}{\Gamma(\beta_1) \dots \Gamma(\beta_{k+1})} \prod_{i=1}^k y_i^{\beta_i-1} (1-y_1-\dots-y_k)^{\beta_{k+1}-1}$$

adică repartitia simplă a lui Dirichlet.

În cazul în care

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{k+1} = \alpha, \quad (1) \text{ devine}$$

$$\begin{aligned} (1') \quad h(y_1, \dots, y_k) &= \frac{\alpha^{k+1}}{\prod_{i=1}^k \alpha_i^{\beta_i/\alpha} \Gamma\left(\frac{\beta_i}{\alpha}\right)} \prod_{i=1}^k y_i^{\beta_i-1} (1-y_1-\dots-y_k)^{\beta_{k+1}-1} \times \\ &\times \int_0^\infty z^{\sum_{i=1}^{k+1} \beta_i - 1} \exp - z^\alpha \left[\left(\frac{y_1}{a_1} \right)^\alpha + \left(\frac{y_2}{a_2} \right)^\alpha + \dots + \left(\frac{1-y_1-\dots-y_k}{a_{k+1}} \right)^\alpha \right] dz. \end{aligned}$$

Cu schimbarea de variabilă

$$z = u^{\frac{1}{\alpha}} \left[\left(\frac{y_1}{a_1} \right)^\alpha + \dots + \left(\frac{y_k}{a_k} \right)^\alpha + \left(\frac{1-y_1-\dots-y_k}{a_{k+1}} \right)^\alpha \right]^{-\frac{1}{\alpha}}$$

(1') devine

$$\begin{aligned}
 h(y_1, \dots, y_k) &= \frac{\alpha^k}{\prod_{i=1}^{k+1} a_i^{\beta_i/\alpha} \Gamma\left(\frac{\beta_i}{\alpha}\right)} \prod_{i=1}^k y_i^{\beta_i-1} (1-y_1-\dots-y_k)^{\beta_{k+1}-1} \times \\
 &\times \left[\left(\frac{y_1}{a_1}\right)^\alpha + \dots + \left(\frac{y_k}{a_k}\right)^\alpha + \left(\frac{1-y_1-\dots-y_k}{a_{k+1}}\right)^\alpha \right]^{-\frac{\sum_{i=1}^{k+1} \beta_i}{\alpha}} \times \\
 &\times \int_0^\infty u^{\frac{\sum_{i=1}^{k+1} \beta_i}{\alpha} - 1} e^{-u} du, \quad \alpha > 0 \\
 &= \frac{\alpha^k \Gamma\left(\frac{\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{k+1}}{\alpha}\right)}{\prod_{i=1}^{k+1} a_i^{\beta_i/\alpha} \Gamma(\beta_i/\alpha)} \prod_{i=1}^k y_i^{\beta_i-1} (1-y_1-\dots-y_k)^{\beta_{k+1}-1} \times \\
 &\times \left[\left(\frac{y_1}{a_1}\right)^\alpha + \dots + \left(\frac{y_k}{a_k}\right)^\alpha + \left(\frac{1-y_1-\dots-y_k}{a_{k+1}}\right)^\alpha \right]^{-\frac{\sum_{i=1}^{k+1} \beta_i}{\alpha}}
 \end{aligned}$$

Observație: În cazul $k=1$, (1) devine repartiția β generalizată studiată în [2].

Primit la 1 iunie 1969

Universitatea București
Facultatea de matematică-mecanică

BIBLIOGRAFIE

1. T. Srodka: On the distribution of product and ratio of power of two independent random variables with the generalized gamma, Maxwell and Weibull distribution !Rocz. polsk. Towm mat. Pracemat (1967) 11 nr. 1 pp. 77-85
2. Ilie Torsan: Asupra unei generalizări a distribuției !Beta" — Studia Universitatis Babeş-Bolyai Fasc. 1, 1969
3. S. Wilks: Mathematical Statistics !John Wiley — New York 1962

ОБОБЩЕННОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДИРИХЛЕ

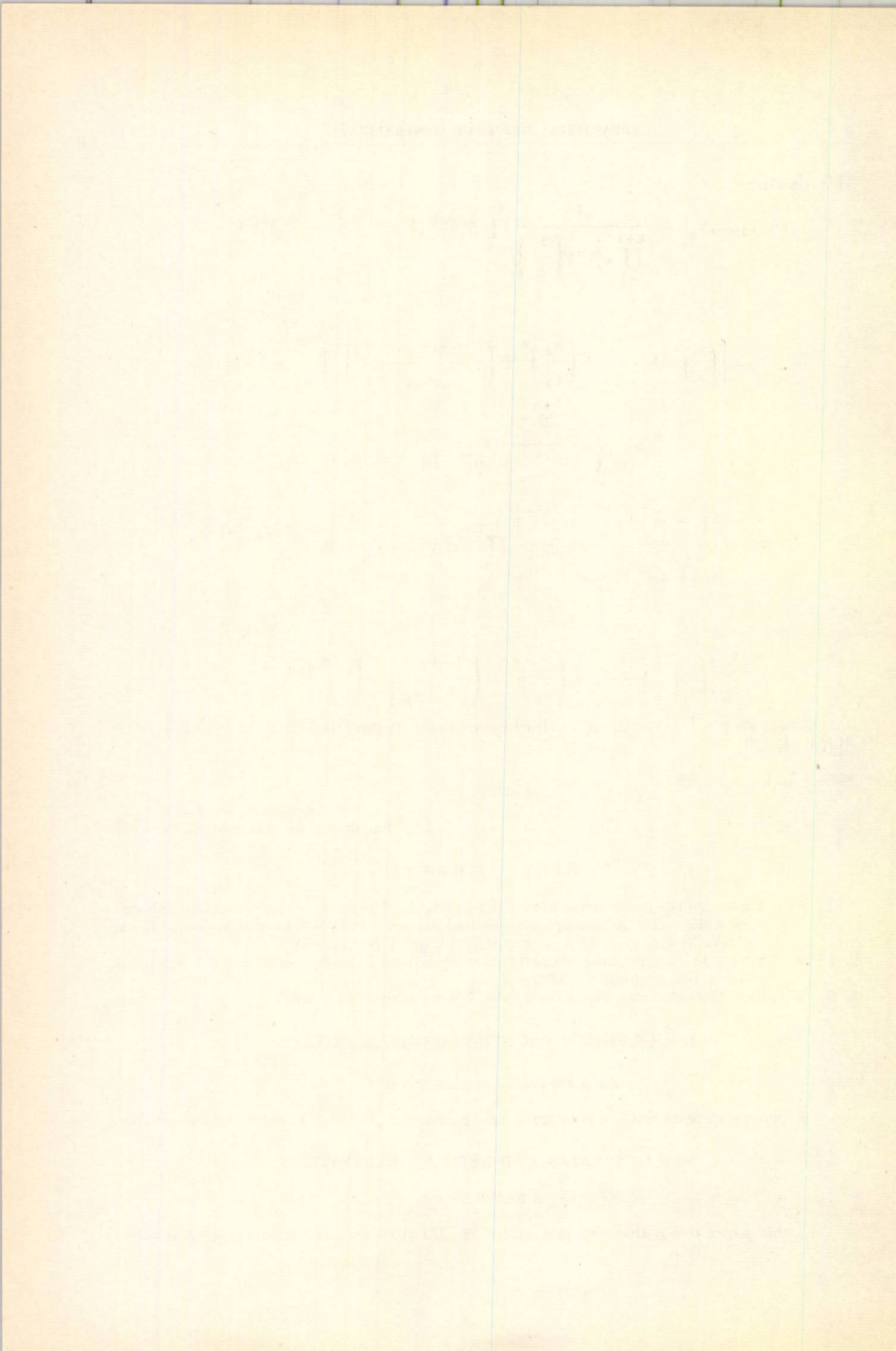
КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В работе определяется и изучается распределение Дирихле в интегральной форме

THE GENERALIZED DIRICHLET REPARTITION

ABSTRACT

In this paper one define and one utilise the Dirichlet repartition in an integral form.



REGARDS SUR BOURBAKI*)

J. DIEUDONNÉ

Cher Président et ami,

Mesdames, Messieurs,

Je vous remercie des paroles aimables que vous avez prononcées en ce qui me concerne et je dois dire moi-même que c'est avec un très grand plaisir que j'ai pu m'échapper pendant une semaine de mes fonctions de doyen et la passer dans un milieu si chaudement sympathique que le vôtre. La tradition d'amitié scientifique, et particulièrement mathématique, entre français et roumains est ancienne et je suis très heureux d'être un des chaînons de cette tradition qui, je l'espère, continuera dans les années qui viennent, de plus en plus intense et de plus en plus cordiale. Eh bien, si vous voulez je vais peut-être ne pas faire un très long discours et je serais heureux ensuite de répondre aux questions que sans doute l'on ne manquera pas de m'adresser. Je n'ai pas la prétention de traiter toute l'histoire des travaux de B o u r b a k i et je vous laisserai à tous la possibilité de poser des questions sur des points que je n'aurais peut-être qu'effleurés.

Pour comprendre l'origine de B o u r b a k i, il faut peut-être se reporter aux années que M. N i c o l e s c u évoquait il y a quelques instants, aux années où nous étions étudiants, les années d'après la guerre de 1914, et cette guerre, on peut bien le dire, avait été extrêmement tragique pour les mathématiciens français. Je ne chercherai pas à juger, ni à donner d'évaluation morale ce qui s'est passé à ce moment-là. Dans le grand conflit de 1914—1918 le gouvernement allemand et le gouvernement français n'avaient pas compris les choses de la même manière en ce qui concernait la science. Alors que les Allemands faisaient très sérieusement travailler leurs savants, mais pour augmenter le potentiel de leurs armées par leurs découvertes et par l'amélioration d'inventions ou de procédés qui leurs servaient ensuite à mieux se battre, les Français, tout au moins au début et pendant un an ou deux, avaient, dans un esprit démocratique et cer-

*) Conférence donnée le 10 octobre 1968 à l'Académie de la République Socialiste de Roumanie.

tainement dans un élan patriotique que l'on ne peut que respecter, considéré que tout le monde devait être au front en première ligne, si bien que les jeunes savants aussi bien que les autres Français faisaient leur devoir sur la ligne de front. Le résultat fut une hécatombe effroyable parmi les jeunes scientifiques français et quand on ouvre les pages des promotions de la guerre de l'Ecole Normale, on voit d'énormes trous, d'énormes vides, de grosses capitales noires qui signifient que deux tiers d'une promotion a été fauchée par la guerre. Cette situation a eu des répercussions fâcheuses pour les mathématiques françaises. Parce que, nous autres, les jeunes, trop jeunes pour avoir été directement touchés par la guerre mais qui entrions justement dans l'Université dans les années suivant la guerre, nous aurions normalement dû avoir comme guides toutes ces promotions de jeunes mathématiciens dont certains, nous sommes sûrs, auraient donné beaucoup plus que des promesses, qui avaient été brutalement décimés et dont l'influence était donc détruite. Evidemment il restait les gens des générations antérieures, de grands savants que nous honorions tous, je pense ici à des maîtres comme Picard, Montel, Borel, Hadamard, Denjoy, Lebesgue, etc. qui étaient, eux, vivants et qui étaient encore en pleine activité, mais c'était des mathématiciens qui approchaient de la cinquantaine, s'ils ne l'avaient largement dépassés. Et il y avait donc un saut d'une génération entre eux et nous ; je ne dis pas qu'ils ne nous apprenaient pas de très belles mathématiques ; nous avons tous suivi, M. Nicolsescu en est témoin, des cours de premier ordre de ces mathématiciens, mais il est indubitable, et c'est vrai d'ailleurs à toute époque, qu'un mathématicien de 50 ans connaît fort bien les mathématiques qu'il a apprises quand il avait 20 ou 30 ans mais n'a que des notions souvent un peu vagues des mathématiques de son temps, de l'époque où il a 50 ans. C'est un fait qu'il faut bien admettre tel qu'il est, nous n'y pouvons rien. Alors, nous avons eu d'excellents professeurs, qui nous ont appris les mathématiques, disons jusqu'à 1900, mais ce qui c'était passé depuis 1900, nous n'en savions pas grand chose, et comme je le disais tout à l'heure, les Allemands, eux, avaient procédé de façon différente, si bien que l'école mathématique allemande de l'époque, dans les années qui suivirent la guerre, avait un éclat tout à fait exceptionnel. Il suffit de penser aux mathématiciens de premier ordre qui ont illustré cette école, pensez à Siegel, pensez à E. Noether, E. Artin, Krull, Hasse, etc., etc. En France, nous ignorions tout cela. Nous ignorions aussi non seulement ce que faisaient les Allemands, mais aussi ce que faisaient les mathématiciens de l'école russe, qui était en plein développement, les mathématiciens de l'école polonaise qui venait de naître et qui brillait d'un très vif éclat, et j'en passe bien d'autres. Nous ne savions pas ce qu'avait fait F. Riesz, nous ne savions pas ce que faisait von Neumann, etc. Nous étions restés un peu dans un milieu clos, un milieu replié sur lui-même, où la théorie des fonctions était reine et maîtresse, et en dehors d'Elie Cartan que lui, 20 ans en avance de son temps, n'était compris par strictement personne (le premier qui l'ait compris après Poincaré fut Hermann Weyl et pendant 10 ans, il est resté seul à comprendre E. Cartan ; par conséquent ce n'était pas nous, pauvres petits étudiants, qui pouvions avoir la prétention de le comprendre) — donc, en dehors d'E. Cartan

qui à cette époque là, ne comptait pas, (il n'a commencé à compter que 20 ans après, mais depuis son influence n'a fait que grandir) nous étions entièrement repliés sur cette théorie des fonctions qui, tout en étant fort importante, bien entendu, ne représentait malgré tout qu'une partie des mathématiques. La seule ouverture que nous avions à ce moment-là vers l'étranger c'était le séminaire d'Hadamard; Hadamard, après la guerre, professeur au Collège de France, au lieu d'avoir à faire ses cours (il en faisait quelques-uns, mais, sans nuire à sa mémoire car il est assez grand savant pour qu'on puisse le dire, ce n'était pas un professeur très brillant) avait eu l'idée (apparemment empruntée à l'étranger, parce que cela ne c'était jamais fait, je crois, en France), d'inaugurer un séminaire d'analyse de travaux mathématiques courants. Au début de l'année il distribuait, à tous ceux qui voulaient bien en parler, les mémoires qu'il jugeait les plus importants dans l'année passée, qui venaient de paraître, et il fallait les expliquer au tableau. C'était une nouveauté pour l'époque, nouveauté qui pour nous était extrêmement précieuse parce que nous y rencontrions là-bas des mathématiciens de toute provenance; très rapidement c'était devenu aussi un centre d'attraction pour les étrangers; ils s'y pressaient en foule (M. Onicescu m'a rappelé qu'il avait lui-même plusieurs fois fait des conférences à Paris au séminaire Hadamard) c'était donc pour nous, jeunes étudiants, une source de connaissances et de vues sur l'ensemble des mathématiques que nous ne trouvions pas dans les cours formels que l'on nous faisait à l'Université. Cet état de choses dura quelques années, jusqu'à ce que certains d'entre nous, à commencer par A. Weil puis Chevalley, étant allés à l'étranger, auprès des Italiens, auprès des Allemands, auprès des Polonais, etc., se sont aperçu que si l'on continuait dans cette direction, la France était en train de s'engager dans une impasse. Nous continuerions sans doute à être très brillants en théorie des fonctions, mais pour tout le reste on ne parlerait plus des mathématiciens français, brisant avec une tradition biséculaire en France, parce qu'en somme, de Fermat jusqu'à Poincaré, les plus grands des mathématiciens français ont toujours eu la réputation d'être des mathématiciens universels, capables de traiter aussi bien d'arithmétique, d'algèbre, d'analyse et de géométrie. Nous commençons donc à être avertis de ce bouillonnement d'idées qui se faisait jour à l'extérieur et plusieurs d'entre nous avaient eu la possibilité d'aller sur place s'instruire et voir quel était le développement qui se faisait un peu en dehors de nous. Après la retraite d'Hadamard, en 1934, son séminaire fut continué par G. Julia sous une forme un peu différente, consistant à étudier, mais de façon un peu plus systématique, les grandes idées nouvelles, qui nous venaient de partout. Et c'est à cette occasion qu'est née l'idée de rédiger un ouvrage d'ensemble, qui, non plus sous forme de séminaire, mais sous forme de livre, engloberait les idées principales des mathématiques modernes. C'est ce qui a donné la naissance au traité de Bourbaki. Je dois dire que les collaborateurs de Bourbaki, étaient fort jeunes à l'époque; ils n'auraient sans doute jamais commencé le travail s'ils avaient été moins jeunes et surtout s'ils avaient été moins ignorants à ce moment: dans les premières réunions sur ce projet, l'idée était que tout serait fini en 3 ans et qu'on rédigerait, dans ce laps de temps l'essentiel des connais-

sances de base des mathématiques. Les événements, et l'histoire en ont décidé autrement: petit à petit, quand nous sommes devenus un peu plus compétents, un peu moins ignorants, nous nous sommes rendus compte de l'immensité de la tâche qui avait été entreprise et qu'il n'y avait aucun espoir d'en terminer si rapidement que cela.

Il est bien vrai qu'il y avait déjà d'excellentes monographies à l'époque et je dois dire que certainement le modèle de B. à ses débuts fut l'excellent traité d'Algèbre de v. der Warden. Il ne faut pas retirer à v. d. W. son mérite mais lui-même dit dans sa préface, comme vous savez, qu'en réalité son traité a plusieurs auteurs, dont E. Noether et E. Artin, si bien que c'était un peu du Bourbaki avant la lettre. Ce traité avait fait grande impression. Je m'en souviens encore — je préparais ma thèse à cette époque-là, 'était en 1930 et j'étais à Berlin — je me souviens du jour où v.d. W. est paru en librairie, j'étais d'une ignorance en algèbre qui actuellement me ferait refuser à la première année d'Université, je me suis précipité sur ces tomes et j'ai été stupéfait de voir le monde nouveau qui s'ouvrait devant moi. Mes connaissances en algèbre à ce moment-là ne dépassaient pas celles de mathématiques spéciales: les déterminants, quelques bribes sur la résolution des équations et les courbes unicursales. Je ne savais pas ce que c'était un idéal, je savais à peine ce qu'était un groupe et j'étais déjà sorti de l'Ecole Normale! Cela vous donne une idée des connaissances mathématiques que pouvait avoir un jeune français mathématicien vers l'année 1930. Nous avons donc essayé de suivre v. d. W., mais il ne couvrait effectivement que l'algèbre et même une petite partie de l'algèbre actuelle. (L'algèbre s'est développée considérablement depuis, en partie à cause du traité de v. d. W. qui en est encore une excellente introduction: souvent on me demande mon avis sur la façon dont on doit commencer à étudier l'algèbre et à la plupart je dis: lisez d'abord v. d. W. malgré ce que l'on a pu faire depuis). Donc nous voulions faire quelque chose de ce genre, or v. d. W. comme vous le savez se caractérise par une extrême précision du langage, il a une organisation extrêmement serrée du développement des idées et des diverses parties de l'ouvrage, et comme ce mode d'exposition nous paraissait le meilleur nous avions à mettre sur pied des quantités de choses qui n'avaient jamais été sérieusement abordées. La topologie générale ne se trouvait que dans quelques mémoires et dans le livre de Fréchet qui était en fait une espèce de compilation d'une quantité énorme de résultats sans aucune espèce d'ordre; je puis en dire autant du livre de Banach, admirable pour la recherche mais complètement désorganisé; dans d'autres sujets, comme l'Intégration (telle que la présente Bourbaki) ou certaines questions d'Algèbre il n'y avait rien. Je ne crois pas qu'avant la parution du traité de Bourbaki sur l'algèbre multilinéaire il y avait au monde un seul ouvrage didactique où on expliquait ce qu'était l'algèbre extérieure. Il fallait se reporter aux oeuvres de Grassmann qui ne sont pas d'une clarté particulièrement limpide. Donc nous nous sommes rapidement rendu compte que nous nous étions lancés dans une entreprise beaucoup plus considérable que nous nous l'imaginions, et vous savez que cette entreprise est très loin d'être terminée. J'ai dans ma valise les épreuves du 34^e volume qui est consacré

à trois chapitres de la théorie des groupes de *Lie*, il y en a d'autres, beaucoup d'autres en préparation, il y a déjà 3 ou 4 éditions de pas mal de volumes précédents et le travail ne semble pas prêt de finir.

Il fallait avoir une idée de départ, il fallait savoir ce que l'on voulait faire. Evidemment il y avait une possibilité, c'était l'Encyclopédie. En fait, elle existait, elle avait été faite comme vous le savez par les Allemands à partir de 1900 et malgré la proverbiale ténacité et l'ardeur au travail des Allemands, en 1930, l'Encyclopédie, après plusieurs éditions, remaniements, etc. était désespérément à la traîne par rapport à l'état de la science mathématique de cette époque. Actuellement c'est une entreprise que nul ne songerait à commencer; étant donné la masse gigantesque des publications mathématiques qui déferle vers nous tous les ans, l'idée de faire une encyclopédie des mathématiques n'est pas réalisable. Je pense qu'il faudra attendre le jour où les ordinateurs seront des êtres pensants et iront assez vite pour assimiler tout cela en quelques minutes. Pour le moment nous n'en sommes pas là et nous ne l'étions pas non plus en 1930; en outre, il aurait été inutile de refaire quelque chose qui, somme toute, malgré ses mérites, avait échoué. Ouvrir l'encyclopédie, même à cette époque, était surtout utile comme ouvrage de référence bibliographique, pour savoir où trouver tel ou tel résultat. Mais il n'y avait, naturellement, aucune démonstration parce que si l'encyclopédie déjà gigantesque avec ses 25—30 tomes, avait dû comprendre des démonstrations, elle aurait été 10 fois plus grande. Or, nous voulions non pas faire un ouvrage de référence bibliographique, mais un ouvrage qui soit un texte mathématique démonstratif, depuis le début jusqu'à la fin. Et ceci nous obligeait à un choix extrêmement strict. Quel choix? Eh bien, c'est là ce qui a été le point crucial, en somme, dans l'évolution de *Bourbaki*. L'idée qui a rapidement dominé, c'est qu'il fallait que l'ouvrage soit avant tout un outil. Un outil, cela veut dire quelque chose qui est utilisable non seulement dans une petite partie des mathématiques mais aussi dans un nombre aussi grand que possible d'endroits des mathématiques. Donc il fallait, si vous voulez, se concentrer sur les idées de bases des mathématiques, les recherches essentielles, en rejetant complètement tout ce qui n'était que secondaire, qui n'avait pas d'application immédiate connue et qui ne conduisait pas directement à des conceptions d'une importance et d'une utilité prouvée. Il y a eu là un travail de criblage qui a soulevé d'innombrables discussions parmi les collaborateurs de *Bourbaki* et qui a également valu à *B.* d'innombrables inimités. Parce qu'au début bien entendu, personne ne s'en souvient mais au fur et à mesure que les ouvrages de *B.* se sont répandus, tous ceux dont le sujet favori ne se trouvait pas inclus dans *B.* ne lui ont pas gardé une reconnaissance très grande. Et je pense qu'il y a lieu d'attribuer à ce choix extrêmement strict une grande partie de l'hostilité qui a entouré *B.* à certaines époques et qui continue encore dans certains pays d'être une tendance assez répandue.

Donc comment choisir ces théorèmes fondamentaux? Eh bien, c'est ici qu'est intervenue une idée nouvelle: celle de structure mathématique. Je ne dis pas que ce soit une idée originale de *Bourbaki*: il n'est pas question que *Bourbaki* contienne quoi que ce soit d'original; *B.* ne cherche pas du



tout à innover en mathématiques, et quand il y a un théorème dans B., c'est qu'il a été déjà été démontré depuis 2, 20 ou 200 ans. En l'occurrence, ce qu'a fait B o u r b a k i, c'est préciser et généraliser une idée répandue depuis assez longtemps. Depuis Hilbert et Dedekind on savait bien que des grandes parties des mathématiques pouvaient se développer logiquement d'une façon extrêmement belle et fructueuse à partir d'un petit nombre d'axiomes bien choisis, c'est-à-dire qu'en se donnant les bases d'une théorie sous forme axiomatique on arrivait à développer toute la théorie d'une façon beaucoup plus élégante et plus compréhensible qu'on ne pouvait le faire autrement. C'est cela qui a donné l'idée générale de la notion de structure mathématique. Disons tout de suite que cette notion est maintenant dépassée par celles de catégorie et de foncteur qui la reprennent sous une forme plus générale et plus commode et il est bien certain que B. qui, comme je vous l'expliquerai tout à l'heure ne recule jamais devant les nouveautés, se fera un devoir d'incorporer prochainement les idées valables de cette théorie dans ses ouvrages.

Une fois que cette idée a été bien mise au point, bien clarifiée il a fallu choisir, et décider quelles étaient les structures les plus importantes des mathématiques et ceci a naturellement, causé beaucoup de discussions avant qu'on se mette d'accord. Je dois même dire que B. n'a aucune prétention à être infaillible, qu'il s'est trompé à plusieurs reprises sur l'avenir qu'il attribuait à telle ou telle structure et qu'il a fait amende honorable quand cela a été nécessaire en revenant sur ses premières idées. Les éditions successives marquent très nettement la trace de ces changements. B. ne prétend pas, ce serait même contraire à son dessein vouloir fixer, figer les mathématiques, c'est exactement le contraire qu'il s'était proposé au début. Par contre si on ne recule pas devant la nouveauté, même quand elle dépasse B., on n'a aucun respect particulier des traditions. Là aussi il y a eu, dans cette attitude systématique et affichée depuis le début, une cause d'hostilité, cette fois-ci de gens de générations antérieures qui voyaient d'un mauvais oeil les libertés que l'on prenait avec les mathématiques de leur époque. En particulier le choix des définitions, l'ordre suivant lequel sont exposés les sujets ont été décidés uniquement suivant un schéma logique et rationnel; si cela ne s'accordait pas avec ce qu'on faisait avant, eh bien, c'est ce que l'on faisait avant qui était jeté par dessus bord, sans aucune espèce de ménagement même pour des traditions séculaires. Pour citer un exemple B. se refuse à dire „non décroissant“ quand il s'agit d'une fonction croissante, parce que c'est une absurdité totale, étant donné que cela ne signifie ce que l'on veut exprimer que pour les relations d'ordre dites linéaires (ou d'ordre total). (Dès que l'on dit non croissant quand il s'agit d'une relation d'ordre qui n'est pas linéaire cela ne veut pas dire du tout „croissant mais non strictement croissant“). Donc B. purement et simplement a aboli cette terminologie, comme beaucoup d'autres. Il en a aussi inventé beaucoup d'autres, en utilisant comme tout le monde le grec quand c'était nécessaire, mais aussi en utilisant des quantités de mots du langage courant, ce qui a fait aussi se hérissier beaucoup de traditionnalistes qui admettent difficilement qu'on appelle boule ou pavé quelque chose que l'on appelait autrefois parallélotope ou hypersphéroïde: „Ça ne faisait pas sérieux“. Récemment

il est paru un petit livre „Le jargon des sciences“ par Etienne qui vous a fait plaisir: Etienne gardien vigilant de la langue française, qui tient à la préserver dans sa pureté originelle et qui est parti en guerre contre le charabia de la plupart des scientifiques; il en a heureusement excepté les mathématiciens français en disant qu'ils avaient la bonne idée de prendre dans la langue courante des mots français authentiques, extrêmement simples, quitte à leur donner des sens différents, mais de telle façon que quand ils parlaient de quelque chose, cela avait tout de même l'air d'être du Français et non pas du jargon. Il cite de jolis exemples, comme des titres récents tels que „platitude et privilège“ ou „sur les variétés riemanniennes non suffisamment pincées“. C'est dans ce style que B. est écrit, dans une langue qui soit reconnaissable, et non pas dans un jargon parsemé d'abréviations, comme on en voit beaucoup dans les textes anglo-saxons, où on vous parle de la C.F.T.C. qui est liée à une A.L.V. à moins que ce ne soit une B.S.F. ou une Z.D., etc. au bout de 10 pages on ne sait plus de quoi on parle. Nous pensons que l'encre n'est pas tellement chère pour que l'on ne puisse pas écrire les choses tout au long, avec un vocabulaire bien choisi.

Je vous ai dit que nous avions donc fait un choix. Je vais expliquer un peu plus précisément ce choix, grosso modo, et je vais me servir d'une image. Nous nous sommes très rapidement rendus compte que malgré l'introduction de l'idée de structure qui était destinée à clarifier et à séparer les choses, les mathématiques se refusaient à se séparer en petits morceaux. Il était évident d'autre part que les anciennes divisions, Algèbre, Arithmétique, Géométrie, Analyse étant périmées: nous y avons renoncé dès le début, à la grande fureur de beaucoup; nous n'avons aucune espèce de respect pour ces choses-là. Par exemple il est bien connu que la géométrie euclidienne est un cas particulier de la théorie des opérateurs hermitiens dans les espaces de Hilbert. Et de même la théorie des courbes algébriques et la théorie des nombres algébriques dérivent fondamentalement les mêmes structures. Je compare volontiers les vieilles divisions des mathématiques aux vieilles divisions des anciens zoologues, qui voyant qu'un dauphin ou un requin ou un thon, étaient, ma foi, des animaux très voisins, disaient: ce sont des poissons puisque tous vivent dans la mer et ont des formes voisines; il a fallu un certain temps pour se rendre compte que les structures de ces animaux n'étaient pas du tout pareilles, et qu'il fallait les mettre dans des classifications très éloignées. Algèbre, Arithmétique, Géométrie et toute ces vieilles balivernes sont tout à fait comparables: il faut regarder la structure de chaque théorie et les classer de cette façon là. Malgré tout, bien entendu, il ne faut pas longtemps pour se rendre compte que malgré cet effort vers l'isolement des structures, elles ont une manière de se mélanger très rapidement et de la façon la plus fructueuse. On peut dire que les grandes idées en mathématiques proviennent de rencontres de plusieurs structures très différentes. Donc, à l'heure actuelle, si vous voulez, voilà l'image que je me fais des mathématiques. C'est une pelote de laine, un écheveau extrêmement enchevêtré où toutes les mathématiques réagissent les unes sur les autres d'une façon qui est presque imprévisible parce que il ne se passe presque pas d'année qu'on ne trouve de nouvelles

réactions de ce genre. Et puis, de cette pelote de laine, il y a un certain nombre de fils qui sortent dans tous les sens, qui ne se raccordent à rien d'autre. Eh bien, la méthode de B. est très simple: on coupe les fils. Qu'est-ce que ça veut dire? Voyons ce qui reste, et puis on fera une liste de ce qui reste, et une liste de ce qui est supprimé. Ce qui reste: les structures archiclassiques (je ne parle pas des ensembles bien entendu): l'algèbre linéaire, un peu de topologie générale (le moins possible) un peu d'espaces vectoriels topologiques (le moins possible), l'algèbre homologique, l'algèbre commutative, l'algèbre non commutative, les groupes de Lie, l'intégration, les variétés différentielles, la Géométrie riemannienne, la topologie différentielle, l'analyse harmonique et ses prolongements, la représentation des groupes en général, au sens le plus large, la géométrie analytique (alors attention: ici je l'entends bien entendu au sens de Serre, le seul qui soit tolérable). Il est strictement intolérable de parler de géométrie analytique pour l'algèbre linéaire avec coordonnées, ce qu'on appelle encore géométrie analytique dans les livres élémentaires. Il n'y a jamais eu de géométrie analytique dans ce sens. Il y a seulement des gens qui font mal l'algèbre linéaire en prenant des coordonnées et c'est ce qu'ils appellent géométrie analytique. A la porte! La géométrie analytique chacun le sait, c'est la théorie des espaces analytiques une des théories les plus difficiles et les plus profondes de toutes les mathématiques. La géométrie algébrique bien entendu, qui est sa soeur jumelle et enfin la théorie des nombres algébriques.

Cela fait déjà un programme assez sérieux. Voyons maintenant ce qui est exclu: La théorie des ordinaux et cardinaux, l'algèbre universelle (vous savez très bien ce que c'est). Les lattices, l'algèbre non associative, la plus grande partie de la théorie des groupes (groupes finis), la plus grande partie de la théorie des nombres (théorie analytique des nombres entre autres). Les procédés de sommation, tout ce qu'on peut appeler l'Analyse fine (séries trigonométriques, interpolation, séries de polynômes, etc. etc. il y a quantité de choses là-dedans) et enfin toutes les mathématiques appliquées bien entendu. Là aussi je voudrais tout de même m'expliquer un peu. Je ne veux absolument pas dire qu'en faisant cette distinction B. émette le moindre jugement de valeur sur l'ingéniosité et la puissance des théories qui sont ainsi cataloguées. Je suis persuadé que la théorie des groupes finis par exemple est à l'heure actuelle une des théories mathématiques les plus profondes et les plus riches en résultats extraordinaires qui soit, alors que des théories comme l'algèbre non commutative sont de difficulté moyenne. Et si je devais porter un jugement de valeur je dirai probablement plutôt que ce sont les mathématiques les plus ingénieuses qui sont exclues de Bourbaki, celles qui suscitent le plus d'admiration, parce qu'elles font plus ressortir l'ingéniosité et la profondeur de leur auteur. Il ne s'agit donc pas d'une classification, à ma droite les bons, à ma gauche les mauvais, nous ne jouons pas au bon Dieu; je veux simplement dire que si on veut arriver à donner une exposition des mathématiques modernes qui réponde à cette idée de constituer un centre d'où tout le reste découle, eh bien il est bien nécessaire d'éliminer des quantités de choses. En théorie des groupes, malgré les théorèmes extraordinairement beaux et profonds qu'on y a démontrés, on ne peut pas dire qu'on dispose d'une méthode d'attaque générale. On en a

plusieurs et on a toujours l'impression que l'on travaille de façon artisanale, en accumulant des séries d'artifices, ce n'est pas quelque chose qui puisse être exposé par B. B. ne peut et ne veut exposer que des théories qui sont rationnellement organisées, où les méthodes découlent naturellement des prémisses et où il n'y a presque plus de place pour l'artifice ingénieux. Donc je répète, ce que B. se propose d'exposer ce sont généralement des théories mathématiques qui ont déjà été complètement épuisées pratiquement, tout au moins dans leurs fondements; il ne s'agit que des fondements, il ne s'agit pas de détails; ces théories sont arrivées à un point où elles peuvent être exposées d'une façon entièrement rationnelle. Il est certain que la théorie des groupes et encore plus la théorie analytique des nombres ne sont qu'une succession d'artifices les uns plus extraordinaires que les autres donc extrêmement anti-B. Je répète, cela ne veut absolument pas dire que ce soit méprisable, c'est plutôt le contraire. Le valeur d'un mathématicien se reconnaît à ce qu'il est capable d'inventer, même des artifices nouveaux. Vous connaissez la vieille histoire: la première fois c'est un artifice et la troisième fois c'est une méthode. Eh bien, je crois que le grand mérite revient beaucoup plus à celui qui invente l'artifice pour la première fois qu'à celui qui s'aperçoit au bout de 3—4 fois qu'on peut en faire une méthode. C'est ce deuxième stade qui est l'objet de B.: recueillir dans les divers procédés utilisés par les mathématiciens ce qui peut-être mis sous forme de théorie cohérente, de théorie logiquement coordonnée, facilement exposable et facilement utilisable.

La méthode de travail utilisée dans B. est une méthode terriblement longue et pénible mais qui est en somme presque imposée par le dessein de l'ouvrage. Une fois qu'on s'est mis plus au moins d'accord sur la nécessité de faire un livre ou un chapitre sur telle ou telle théorie (En général pour un livre on prévoit un certain nombre de chapitres), dans les réunions qui se tiennent en moyenne trois fois par an le travail de rédaction est confié à celui des collaborateurs qui veut bien s'en charger. Il écrit donc une première version du chapitre, ou des chapitres qu'on lui a proposés, avec un plan assez vague, où il est généralement assez libre d'insérer ce qui lui plaît, de négliger ce qui ne lui plaît, pas etc., à ses risques et périls, comme vous allez voir. Au bout d'un an ou de deux ans, quand il a écrit sa rédaction, cette rédaction revient devant le congrès B. qui la lit à haute voix en général, sans en omettre une page, qui examine chaque démonstration point par point et qui critique de façon impitoyable le travail du collaborateur qui est en train d'être lu. Il faut avoir assisté à un Congrès B. pour se rendre compte à quel point cette critique est virulente et dépasse de très loin ce que l'extérieur a pu adresser come reproches à B., dans un langage qu'il est impossible de répéter ici, où les questions d'âge, je vous dirai tout à l'heure quelle est la limite supérieure, mais, même quand il y a 20 ans de différence d'âge ça n'empêche pas le plus jeune de traîner dans la boue mathématique l'aîné qu'il considère n'avoir rien compris à la question. Il faut savoir prendre cela avec le sourire comme il se doit, d'ailleurs la réciproque ne tarde pas longtemps, personne ne peut se targuer d'être infaillible aux yeux des membres de B. et tout se passe finalement le mieux du monde, malgré le caractère extrêmement animé et prolongé

des discussions. Certains étrangers, qui ont assisté quelquefois comme invités à des séances de Congrès Bourbaki en ont toujours tiré l'impression qu'il s'agissait d'une bande de fous et que l'on ne pouvait absolument pas concevoir comment ces gens qui criaient toujours 3 ou 4 à la fois en parlant de mathématiques pouvaient jamais faire quelque chose de sensé. C'est peut-être un mystère, mais tout finit tout de même, de temps en temps, par se décanter. Une fois que la première version a été déchirée en petits morceaux, réduite à néant, on charge un deuxième collaborateur de recommencer. Le malheureux sait ce qui l'attend parce qu'il repart selon de nouvelles instructions, mais entre temps les idées du congrès vont changer et l'année suivante sa rédaction sera probablement de nouveau déchirée en petits morceaux ; un troisième recommencera, et ainsi de suite. On penserait que c'est un processus sans fin, une récurrence qui n'a pas de raisons de s'arrêter ; en fait on s'arrête pour des raisons purement humaines ; quand 6 ou 7 ou 8 ou 10 fois de suite on a vu revenir le même chapitre, tout le monde en est excédé à un tel point qu'il y a vote unanime pour l'envoyer à l'impression. Cela ne veut pas dire que ce soit parfait, et très souvent on s'est aperçu qu'on avait eu tort, malgré toutes ces précautions préliminaires, de s'engager dans certaines voies, on est revenu à d'autres idées dans des éditions successives. Mais la plus grosse difficulté, c'est certainement l'accouchement de la 1ère édition. Il y faut en moyenne 8 à 12 ans, entre le moment où un chapitre est mis en chantier la première fois et le moment où il sort en librairie. Ce qui sort en ce moment-ci ce sont des chapitres qui ont été discutés pour la première fois vers 1955.

Je vous disais tout à l'heure qu'il y avait une limite d'âge supérieure ; il a été assez rapidement reconnu que pour la même raison dont je parlais au début de cette causerie, un mathématicien qui a dépassé 50 ans peut être encore un très bon mathématicien, encore très productif, mais qu'il est rare qu'il arrive à s'adapter aux idées nouvelles, aux idées des gens qui ont 25 ou 30 ans de moins que lui. Or une entreprise comme B. se veut permanente : il n'est pas question de dire que l'on fixe les mathématiques à telle ou telle époque ; si les mathématiques exposées par B. ne correspondent plus à la tendance de l'époque, l'ouvrage est inutilisable, il faut le refaire (c'est ce qui s'est d'ailleurs produit déjà pour plusieurs des volumes de B). Donc, à ce moment là s'il y avait des personnes d'un certain âge parmi les membres de B. elles risqueraient de freiner cette tendance salutaire, en considérant qu'au fond tout était très bien du temps de leur jeunesse, et qu'il n'y a pas de raison de changer, ce qui serait désastreux. Alors, pour éviter qu'il ait des tensions de ce genre qui auraient abouti infailliblement à l'éclatement de B. tôt ou tard, il a été décidé, au moment où la question s'est posée, quelques années avant l'âge fatidique, que tous les collaborateurs de B. se retireraient à l'âge de 50 ans. Et il en est ainsi ; tous les collaborateurs actuels de B. ont moins de 50 ans. Les membres fondateurs bien entendu se sont retirés depuis bientôt plus de 10 ans, et même ceux qu'on considérerait jeunes il n'y a pas si longtemps ont déjà dépassé, ou sont près d'atteindre l'âge de la retraite. Alors il s'agit de remplacer les membres qui s'en vont. Comment fait-on ? Eh bien, il n'y a pas de règle ; parce que dans B. la seule règle formelle est celle que

je viens de vous dire, c'est la retraite à 50 ans, en dehors de cela, on peut dire que la seule règle c'est qu'il n'y a pas de règle. Il n'y a pas de règle en ce sens qu'il n'y a jamais de vote, il faut toujours sur tous les points l'unanimité, chaque membre a le droit de veto si un chapitre lui semble mauvais. Le veto signifie simplement que l'on n'admet pas l'impression du chapitre et qu'il faut recommencer à l'étudier. C'est ce qui explique la longueur du processus, le fait que l'on a tellement de mal à se mettre d'accord sur une rédaction finale.

Il s'agit donc de remplacer les membres qui sont atteints par la limite d'âge ; on ne les remplace pas formellement (cela serait une règle, et il n'y a pas de règle), il n'y a pas de siège vacant comme dans une académie. Comme la plupart des membres de B. sont professeurs de même beaucoup professeurs à Paris, ils ont l'occasion de voir de près les jeunes mathématiciens, les garçons qui commencent à faire de la recherche mathématique et on s'aperçoit vite quand parmi les jeunes il y a un garçon de valeur, qui semble montrer des promesses de grand avenir. Alors, à ce moment là, la procédure consiste à l'inviter à assister à un Congrès en qualité de „cobaye“, c'est la méthode traditionnelle. Vous savez tous ce que c'est un cobaye, un petit cochon d'Inde sur lequel on essaye tous les virus. Eh bien, c'est un peu cela, le malheureux est soumis au feu roulant des discussions B. et non seulement il faut qu'il comprenne mais il faut aussi qu'il intervienne. S'il est muet et silencieux, c'est bien simple, il ne sera plus réinvité. Il faut aussi qu'il manifeste une tendance dont l'absence a écarté de B. des mathématiciens d'une valeur extrêmement grande, mais qui n'avaient pas l'esprit voulu. Au moment d'un Congrès, les rédactions viennent à l'ordre du jour sans aucune espèce d'ordre, on ne sait pas d'avance si à tel Congrès on va faire uniquement de la topologie différentielle si au suivant on fera l'algèbre commutative etc. ; pas du tout, tout y est mélangé (toujours l'exemple, le symbole qu'on pourrait prendre comme symbole de B. la pelote de laine) et par conséquent un membre de B. est supposé s'intéresser à tout ce qu'il écoute. S'il est algébriste forcené et qu'il dise „Moi je m'intéresse à l'algèbre mais à rien d'autre“ c'est très légitime, mais il ne sera jamais membre de B. parce qu'il faut pouvoir s'intéresser à tout à la fois. Non pas être capable de créer partout, bien entendu ; il n'est pas question de demander à chacun d'être un mathématicien universel, c'est réservé à un petit nombre de génies, il y a en malheureusement beaucoup trop peu, et les membres de B. n'ont aucune raison d'être des génies. Mais en tout cas chacun doit être capable de s'intéresser à tout et pouvoir, le jour venu, faire une rédaction même si ce n'est pas dans sa spécialité. Je dois dire que c'est une expérience qui est arrivée pratiquement à tous les membres de B. et je crois que la plupart d'entre eux l'ont trouvée extrêmement bénéfique. En tout cas, en ce qui concerne mon expérience personnelle, je crois que si je n'avais pas été soumis à cette obligation de rédiger des questions dont je ne connaissais pas le premier mot, et d'arriver à m'en tierer, je n'aurais jamais fait le quart ou le dixième des mathématiques que j'ai pu écrire, parce que forcément quand on se met à écrire sur des questions, qu'on ne connaît pas, si l'on est mathématicien on est forcé de se poser des questions, c'est la caractéristique du mathématicien,

et par conséquent on essaye de les résoudre, et cela conduit à des travaux personnels, indépendants de B, qui valent ce qu'ils valent, mais enfin qui sont nés de B. Donc on ne peut pas dire que ce soit une pratique qui soit mauvaise. Seulement, il y a d'excellents esprits qui ne sont pas susceptibles de s'adapter à ce genre d'obligation, des esprits qui sont très profonds, de premier ordre dans leur spécialité mais à qui il ne faut pas parler des autres spécialités, il y a des algébristes impénitents à qui vous ne ferez jamais avaler de l'Analyse et des Analystes pour qui le corps des quaternions est une monstruosité. Ces mathématiciens peuvent être des mathématiciens de premier ordre, bien supérieure à la plupart des membres de B.; nous le reconnaissons sans peine et je pourrais citer des noms très illustres, mais qui ne pourraient être membres de B. Pour revenir au cobaye, quand il est invité, on commence par voir s'il possède cette qualité d'adaptation. Souvent il n'en n'est rien, alors, on lui souhaite bonne chance et il continue son chemin. De temps en temps, heureusement, on trouve, parmi les jeunes, des garçons qui ont cette tendance, cet appétit de connaissance universelle des mathématiques, et d'adaptation aux diverses théories, et au bout de très peu de temps, si on s'aperçoit qu'ils rendent vraiment bien, ils deviennent membres de B., sans qu'il y ait naturellement de vote, d'élection nide cérémonie quelconque. B., je le repète, a une seule règle, c'est de ne pas avoir de règle, sauf la retraite à 50 ans.

Pour terminer, je voudrais répondre à une attaque assez récente contre B. de la part de certains jeunes d'un certain pays. On accuse B. de stériliser la recherche mathématique. J'avoue que je ne comprends pas du tout pourquoi. B. n'a pas la prétention d'être un ouvrage stimulant la recherche. Je disais tout à l'heure que B. ne peut guère se permettre que d'écrire sur des théories mortes, des choses réglées définitivement où il n'y a plus qu'à glaner (sauf imprévu naturellement; il ne faut jamais dire que quoi que ce soit est mort en mathématique, parce que quand on l'a dit, le lendemain il y a quelqu'un qui reprend cette théorie, qui y introduit une nouvelle idée et elle se remet à vivre). Disons qu'il s'agit de théories mortes au moment où l'on écrit, c'est-à-dire qu'il n'y a plus personne depuis 10 ans, ou depuis 20 ans, ou depuis 50 ans, qui ait fait des découvertes significatives dans ce genre de théories que B. développe, quand elles sont dans la partie jugée importante et centrale, en tant qu'outils qui serviront à des recherches ailleurs. Mais ce ne sont pas nécessairement des stimulants pour la recherche. Il s'agit de donner des références, des points d'appui à celui qui veut connaître l'essentiel d'une théorie. Il s'agit de savoir que quand on veut travailler par exemple dans les espaces vectoriels topologiques il y a 3 ou 4 théorèmes qu'il faut bien connaître: Hahn-Banach, Banach-Steinhaus, le graphe fermé, il s'agit de les trouver quelque part. Mais personne n'a l'idée d'améliorer ces théorèmes, ils sont ce qu'ils sont, ils sont extrêmement utiles, c'est la chose fondamentale, et ils se trouvent dans B. c'est ce que l'on désire; quant à stimuler la recherche, évidemment s'il se trouve que dans une théorie très ancienne il existe des problèmes ouverts, on les signale, mais ce n'est pas le but de B. Le but de B. c'est, je le repète, de donner des outils de travail, non pas de faire des discours très stimulants sur des problèmes ouverts des mathématiques nouvelles,

parce que ces problèmes ouvertes en général, sont beaucoup plus loin que B, ne peut aller. C'est la mathématique vivante et B. ne touche pas la mathématique vivante, il ne peut pas, étant donné que par définition elle change tous les ans: si on écrivait là-dessus un livre suivant la méthode B. c'est à dire prenant 8 ou 10 ans pour son élaboration, vous vous imaginez ce que pourrait être le livre au bout de 12 ans. Il ne représenterait absolument plus rien, il faudrait le modifier tout le temps, et ce serait comme la vieille Encyclopédie, on n'en finirait jamais. Voilà les quelques explications que je voulais vous donner. Maintenant je serais très heureux si quelqu'un me pose des questions, de répondre, des compléments à ce que j'ai dit.

Si vous voulez, B. part d'une croyance de base (c'est une croyance métaphysique non démontrable, nous le reconnaissons volontiers) c'est que les mathématiques sont fondamentalement simples et que pour chaque question mathématique il y a une meilleure manière de la traiter parmi toutes les manières possibles, une manière optimum. Nous pouvons donner des exemples où c'est vrai, et nous pouvons donner des exemples où nous n'en savons rien parce que l'on n'a pas trouvé jusqu'à présent la méthode optimum. Je citais par exemple la théorie des groupes et la théorie des nombres, c'est assez caractéristique. En théorie des groupes on a des quantités de méthodes, toutes plus ingénieuses les unes que les autres, c'est splendide et ingénieux et d'une complexité inouïe, mais ça n'est pas, nous en sommes persuadés, la manière définitive de traiter la question.

Par contre, prenons la théorie des nombres algébriques; depuis Hilbert c'est systématisé de telle sorte que l'on sait qu'il y a une bonne manière de prendre les questions.

On en change quelquefois mais enfin, petit à petit, on arrive à trouver une manière, meilleure que les autres. Ce n'est une croyance, je le répète, une croyance métaphysique.

En ce qui concerne les fondements nous croyons au fond à la réalité des mathématiques mais bien entendu quand les philosophes viennent nous attaquer avec leurs „paradoxes“ on se hâte de se réfugier derrière le formalisme et alors on dit: pas du tout, nous n'y croyons pas, les mathématiques sont strictement sans aucune signification, on va vous le démontrer par $A + B$ et on leur sort les chap. 1 et 2 de la théorie des ensembles; ensuite on est tranquille et on recommence à faire des mathématiques, comme on l'a toujours fait, avec la sensation qu'a tout mathématicien, qu'il travaille dans quelque chose de réel; sensation qui est probablement une illusion mais qui est bien commode. Voilà l'attitude de Bourbaki vis-à-vis des fondements.

REMARQUES SUR LES ÉQUATIONS DE DISPERSION D'UN PLASMA À DEUX COURANTS OPPOSÉS

M. DRĂGANU

Introduction

Différents auteurs ont analysé du point de vue théorique le problème des instabilités des deux faisceaux d'hydrogène en collision, tant dans la supposition d'une température nulle, que dans celle de l'existence d'un mouvement thermique appréciable. On a essayé de cette façon à expliquer certains phénomènes liés à la rencontre des courants des particules solaires avec l'atmosphère terrestre (aurores boréales, courants magnétiques) [3], [5], [4].

Parmi ces développements théoriques c'est surtout celui de Kellog et Liemohn [4] cité ci-dessus, qui a attiré notre attention. On y considère notamment un plasma d'extension infinie totalement ionisé, constitué par des électrons et des protons, le phénomène de diffusion de chaque espèce étant régi par une équation de Boltzmann-Vlasov sans terme de choc et unidimensionnelle par rapport à la position et à la vitesse. Le seul champ de force en présence est le champ électrique self-consistant déterminé par l'équation de Poisson qui correspond aux deux composantes du plasma.

Dans les lignes qui suivent nous voulons reprendre les considérations des ces auteurs, en gardant d'abord les mêmes hypothèses sur l'état du plasma, sans tout de même négliger l'effet des chocs, que nous introduirons dans les équations de diffusion d'une manière simple, en utilisant les temps de relaxation. Ce problème fera l'objet de la première partie du présent mémoire. La seconde partie sera consacrée au même problème de l'instabilité des deux faisceaux de plasma d'hydrogène en collision, en présence non seulement du champ électrique self-consistant, mais aussi d'un champ magnétique constant appliqué. L'effet des chocs sera cette fois lui aussi pris en considération, toujours par l'intermédiaire du temps de relaxation. Néanmoins, nous voulons restreindre nos considérations au cas particulier des perturbations se propageant dans la direction du champ magnétique appliqué.

I. Le plasma sous la seule action de son propre champ électrique

Désignons par F_α les fonctions de distributions des deux constituants du plasma, l'indice α étant égal à e pour les électrons, et à p pour les protons. Soit e_α la charge des deux espèces des particules ($e_\alpha = -|e|$ pour les électrons, $e_\alpha = |e|$ pour les protons) et soit encore m_α leurs masses. Désignons ensuite par ν_α , comme d'habitude, des constantes inversement proportionnelles aux temps de relaxation τ_α , relatifs aux deux espèces de particules considérées. Alors, les équations de Boltzmann-Vlasov du problème s'écriront sous la forme suivante

$$(1) \quad \frac{\partial F_\alpha}{\partial t} + u \frac{\partial F_\alpha}{\partial z} + e_\alpha \frac{E}{m_\alpha} \frac{\partial F_\alpha}{\partial u} = -\nu_\alpha (F_\alpha - F_{\alpha 0}), \quad (\alpha = e, p),$$

le champ électrostatique self-consistant $E \equiv E(t)$ étant déterminé par l'équation de Poisson

$$(2) \quad \frac{\partial E(z, t)}{\partial z} = 4\pi \sum_{\alpha}^{e, p} e_\alpha \int_{-\infty}^{\infty} F_\alpha(z, u, t) du.$$

Soulignons que dans les équations (1) les termes de choc qui surviennent concernent les chocs entre particules d'espèce différentes, tandis que les termes correspondants aux chocs entre particules de même espèce ont été négligés.

On linéarise les équations (1) et (2) d'après le procédé habituel en supposant les petites perturbations représentées par des ondes planes, c'est-à-dire en posant

$$(3) \quad F_\alpha(z, u, t) = g_\alpha(u) + h_\alpha(u) \exp \{i(kz - \omega t)\}, \quad (\alpha = e, p),$$

$$(4) \quad E(z, t) = \mathbb{S} \exp \{i(kz - \omega t)\},$$

ω étant un nombre complexe. Si l'on substitue (3) en (1), on déduit facilement

$$(5) \quad h_\alpha(u) = -\frac{e_\alpha}{m_\alpha} \frac{\mathbb{S} \partial F_{\alpha 0} / \partial u}{i(ku - \omega) + \nu_\alpha}.$$

L'équation linéarisée de Poisson s'écrira, d'autre part, en vertu de (4) sous la forme suivante

$$(6) \quad ik \mathbb{S} = 4\pi \sum_{\alpha}^{e, p} e_\alpha \int_{-\infty}^{\infty} h_\alpha(u) du,$$

de sorte qu'en substituant ici (5) et en simplifiant par $\mathbb{S}$, on parvient à l'équation de dispersion

$$(7) \quad \frac{k^2}{4\pi} = \sum_{\alpha}^{e, p} \frac{e_\alpha^2}{m_\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(u - \frac{\omega}{k} \right) - \frac{i\nu_\alpha}{k} \right]^{-1} \frac{\partial F_{\alpha 0}}{\partial u} du.$$

Cette équation est plus générale que celle utilisée par Kellog et Liemohn [4] car elle contient aussi le terme représentant la correction due aux chocs.

Après une intégration par parties dans le second membre de cette dernière équation, compte tenu des conditions aux limites

$$(8) \quad F_{\alpha 0}(u = \pm \infty) = 0, \quad (\alpha = e, p)$$

on obtient

$$(9) \quad \frac{k^2}{4\pi} = \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(u - \frac{\omega}{k} \right) - \frac{i\nu_{\alpha}}{k} \right]^{-2} F_{\alpha 0}(u) du.$$

Mais, comme on suppose ω être un nombre complexe, posons

$$(10) \quad \omega = \omega_r + i\omega_i.$$

Introduisons encore les notations suivantes

$$(11) \quad c_r = \omega_r/k, \quad c_i = \omega_i/k, \quad \mu_{\alpha} = \nu_{\alpha}/k, \quad (\alpha = e, p).$$

L'équation (9) s'écrira alors sous la forme

$$(12) \quad \frac{k^2}{4\pi} = \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} [u - c_r - i(c_i + \mu_{\alpha})]^{-2} F_{\alpha 0}(u) du.$$

De la même manière que Kellog et Liemohn [4], nous admettons pour chaque composante des deux faisceaux de plasma une distribution maxwellienne, c'est-à-dire nous posons

$$(13) \quad F_{\alpha}(u) = F_{\alpha 0}^{(1)}(u) + F_{\alpha 0}^{(2)}(u), \quad (\alpha = e, p)$$

avec

$$(14) \quad F_{\alpha 0}^{(i)}(u) = N_i \left(\frac{m_{\alpha}}{2\pi T_i} \right)^{1/2} \exp. \{ -m_{\alpha}(u - U_i)^2 / 2T_i \}, \quad (\alpha = e, p),$$

où N_i , T_i et U_i sont respectivement les densités, les températures et les vitesses moyennes des deux faisceaux en collision considérés, désignés eux-mêmes par l'indice i ($i = 1, 2$).

Nous voulons considérer particulièrement le cas $U_1 = U_d > 0$, $U_2 = 0$. Introduisons encore les nouvelles notations

$$(15) \quad \begin{cases} A_{\alpha 1} = m_{\alpha}(U_d - c_r)^2 / 2T_1, & A_{\alpha 2} = m_{\alpha}c_r^2 / 2T_2, \\ \gamma_{\alpha 1} = (c_i + \mu_{\alpha}) / (U_d - c_r); & \gamma_{\alpha 2} = (c_i + \mu_{\alpha}) / c_r. \end{cases}$$

et faisons aussi le changement de variables

$$(16) \quad \xi_1 = (u - c_r) / (U_d - c_r), \quad \xi_2 = (u - c_r) / c_r;$$

alors, l'équation de dispersion (12) prendra la forme suivante

$$(17) \quad \frac{k^2}{4\pi} = \frac{N_2}{(2\pi T_1)^{1/2} (U_d - c_r)} \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^2}{m_{\alpha}^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp \{ -A_{\alpha 1}(\xi_1 - 1)^2 \}}{(\xi_1 - i\gamma_{\alpha 1})^2} d\xi_1 + \\ + \frac{N_2}{(2\pi T_2)^{1/2} c_r} \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^2}{m_{\alpha}^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp \{ -A_{\alpha 2}(\xi_2 + 1)^2 \}}{(\xi_2 - i\gamma_{\alpha 2})^2} d\xi_2.$$

On peut se rendre compte à la première vue, que les intégrales

$$(18) \quad I_{\alpha i}^{(\pm)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp \{-A_{\alpha i}(\xi_i \pm 1)^2\}}{(\xi_i - i\gamma_{\alpha i})^2} d\xi_i,$$

qui surviennent en (17), sont du même type que l'intégrale générale évaluée déjà par K e l l o g et L i e m o h n [4] dans le cas étudié par eux. Si l'on fait notamment en (17) $\gamma_{\alpha 1} = \gamma_{\alpha 2} (\alpha = e, p)$ on retombe sur l'équation de dispersion analysée par ces auteurs.

Remarquons enfin, qu'en utilisant la notation (18), l'équation de dispersion (17) peut s'écrire sous la forme plus succincte

$$(19) \quad \frac{\hbar^2}{4\pi} = \sum_{\alpha} \frac{e_d^2}{m_{\alpha}^{1/2}} \left[\frac{N_1}{(2\pi T_1)^{1/2} (U_d - c_r)} I_{\alpha 1}^{(-)} + \frac{N_2}{(2\pi T_2)^{1/2} c_r} I_{\alpha 2}^{(+)} \right].$$

II. Le plasma en présence d'un champ magnétique appliqué constant

a). Équations fondamentales

Passons maintenant au cas d'un plasma en présence d'un champ magnétique appliqué constant, les autres conditions restant celles considérées antérieurement. Les équations de B o l t z m a n n - V l a s o v avec le terme de choc de K r o o k s'écriront alors sous la forme

$$(20) \quad \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial \vec{x}} + \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{H} \right) \cdot \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial \vec{v}} = -\nu_{\alpha} (F_{\alpha} - F_{\alpha 0}), \quad (\alpha = e, p)$$

À ces équations il faut joindre les équations de Maxwell qui déterminent les champs électrique et magnétique self-consistants à l'intérieur du plasma. Mais, dans le but de déduire l'équation de dispersion, il est plus convenable de remplacer dès le début l'équation de M a x w e l l - A m p è r e par l'équation suivante (voir, par exemple [6] et [7], qui résulte par l'élimination du champ magnétique entre les équations de Maxwell,

$$(21) \quad \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t},$$

où

$$(22) \quad \vec{j}(\vec{x}, t) = \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{v} F_{\alpha}(\vec{x}, \vec{v}, t) d\vec{v}.$$

La champ magnétique sera déterminé en fonction du champ électrique $\vec{E}$ par l'équation de Maxwell-Faraday

$$(23) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E}.$$

Choisissons maintenant la direction du champ magnétique constant appliqué $\vec{H}_0$ comme axe des z et linéarisons les équations (20) — (23), en supposant d'erechef les petites perturbations représentées par des ondes planes, c'est-à-dire en posant

$$(24) \quad F_\alpha(\vec{x}, \vec{v}, t) = F_{\alpha 0}(\vec{v}) + h_\alpha(\vec{v}) \exp \{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)\},$$

$$(25) \quad \vec{E} = \vec{\mathcal{E}} \exp \{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)\},$$

$$(26) \quad \vec{H} = H_0 \vec{e}_z + \vec{\mathcal{H}} \exp \{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)\},$$

$\vec{e}_z$ étant ici le verseur de l'axe des z . Si l'on remplace ces expressions en (20), on obtiendra, compte tenu de (23), les équations de Boltzmann-Vlasov linéarisées sous la forme suivante (à comparer [1])

$$(27) \quad i(\vec{k} \cdot \vec{v} - \omega - i\nu_\alpha) h_\alpha(\vec{v}) + \omega_{c\alpha} \left(v_y \frac{\partial}{\partial v_x} - v_x \frac{\partial}{\partial v_y} \right) h_\alpha(\vec{v}) + \\ + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \left\{ \vec{\mathcal{E}} \left[1 - \frac{1}{\omega} (\vec{k} \cdot \vec{v}) \right] + \frac{1}{\omega} \vec{k} (\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{v}) \right\} \cdot \frac{\partial F_{\alpha 0}}{\partial \vec{v}} = 0, \quad (\alpha = e, p),$$

où

$$(28) \quad \omega_{c\alpha} = (e_\alpha H_0) / (m_\alpha c).$$

De même, de l'équation (21), il en résulte

$$(29) \quad -k^2 \vec{\mathcal{E}} + \vec{k} (\vec{k} \cdot \vec{\mathcal{E}}) + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{\mathcal{E}} = \vec{S},$$

avec

$$(30) \quad \vec{S} = -i \frac{4\pi\omega}{c^2} \sum_\alpha e_\alpha \int \vec{v} h_\alpha(\vec{v}) d\vec{v}.$$

Introduisons un système de coordonnées cylindriques dans l'espace des vitesses par l'intermédiaire des relations

$$(31) \quad v_x = w \cos \theta, \quad v_y = w \sin \theta, \quad v_z = u,$$

où

$$(32) \quad w^2 = v_x^2 + v_y^2.$$

Alors, un calcul direct nous conduit facilement à l'égalité

$$(33) \quad v_x \frac{\partial}{\partial v_y} - v_y \frac{\partial}{\partial v_x} = \frac{\partial}{\partial \theta},$$

de sorte que dans le cas particulier $k_x = k_y = 0$, $k_z = k$ — le seul cas que nous voulons prendre en considérations ici — l'équation (27) deviendra

$$(34) \quad \frac{\partial h_\alpha(\theta)}{\partial \theta} - i\beta_\alpha h_\alpha(\theta) = F_{\alpha E}(\theta) \quad (\alpha = e, p)$$

où

$$(35) \quad \beta_\alpha = \frac{1}{\omega_{c\alpha}} (ku - \omega - i\nu_\alpha),$$

$$(36) \quad F_{\alpha E} = \frac{e_\alpha}{m_\alpha \omega_{c\alpha}} [(\mathbb{E}_x \cos \theta + \mathbb{E}_y \sin \theta) a_{\alpha 1} + \mathbb{E}_z a_{\alpha 2}],$$

$$(37) \quad a_{\alpha 1} = \left(1 - \frac{ku}{\omega}\right) \frac{\partial F_{\alpha 0}}{\partial w} + \frac{k w}{\omega} \frac{\partial F_{\alpha 0}}{\partial u}, \quad a_{\alpha 2} = \frac{\partial F_{\alpha 0}}{\partial u}.$$

La solution univoque de l'équation (34) s'écrit immédiatement, car elle sera tout à fait analogue à celle déduite antérieurement dans le cas de l'absence du terme des chocs (voir [1]), à la seule différence que cette fois l'expression β_α contient une constante imaginaire additive de plus. Cette solution est notamment la suivante

$$(38) \quad h_\alpha(\theta) = \frac{ie_\alpha}{m_\alpha \omega_{c\alpha}} \left\{ \frac{1}{2} a_{\alpha 1} \left[\mathbb{E}_x \left(\frac{e^{i\theta}}{\beta_\alpha - 1} + \frac{e^{-i\theta}}{\beta_\alpha + 1} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - i \mathbb{E}_y \left(\frac{e^{i\theta}}{\beta_\alpha - 1} - \frac{e^{-i\theta}}{\beta_\alpha + 1} \right) \right] + \frac{a_{\alpha 2}}{\beta_\alpha} \mathbb{E}_z \right\}.$$

D'autre part, dans le cas particulier auquel nous nous bornons ici, l'équation vectorielle (29) se réduit aux trois équations scalaires suivantes

$$(39) \quad \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \mathbb{E}_x = S_x,$$

$$(40) \quad \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \mathbb{E}_y = S_y,$$

$$(41) \quad \frac{\omega^2}{c^2} \mathbb{E}_z = S_z,$$

où

$$(42) \quad S_x = -i \frac{4\pi\omega}{c^2} \sum_\alpha^{e,p} e_\alpha \int_0^\infty w^2 dw \int_{-\infty}^\infty du \int_0^{2\pi} h_\alpha(\theta) \cos \theta \cdot d\theta,$$

$$(43) \quad S_y = -i \frac{4\pi\omega}{c^2} \sum_\alpha^{e,p} e_\alpha \int_0^\infty w^2 dw \int_{-\infty}^\infty du \int_0^{2\pi} h_\alpha(\theta) \sin \theta \cdot d\theta,$$

$$(44) \quad S_z = -i \frac{4\pi\omega}{c^2} \sum_\alpha^{e,p} e_\alpha \int_0^\infty w dw \int_{-\infty}^\infty u du \int_0^{2\pi} h_\alpha(\theta) d\theta.$$

Si l'on exprime en (42) et (43) les fonctions circulaires à l'aide des exponentielles et si, ensuite, on remplace $h_\alpha(\theta)$ par son expression (38), on obtient,

en combinant (39) — (41) avec (42) — (44), les équations

$$(45) \quad \left(\frac{k^2 c^2}{\omega^2} - \varepsilon_{xx} \right) \mathbb{E}_x + \varepsilon_{xy} \mathbb{E}_y + \varepsilon_{xz} \mathbb{E}_z = 0,$$

$$(46) \quad \varepsilon_{yx} \mathbb{E}_x + \left(\frac{k^2 c^2}{\omega^2} - \varepsilon_{yy} \right) \mathbb{E}_y + \varepsilon_{yz} \mathbb{E}_z = 0,$$

$$(47) \quad \varepsilon_{zx} \mathbb{E}_x + \varepsilon_{zy} \mathbb{E}_y + \varepsilon_{zz} \mathbb{E}_z = 0,$$

les constantes diélectriques qui y surviennent ayant les expressions suivantes

$$(48) \quad \varepsilon_{xx} = 1 - \frac{2\pi^2}{\omega} \sum_{\pm} \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \int_0^{\infty} w^2 dw \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_{\alpha 1} du}{ku - \omega - i\nu_{\alpha} \pm \omega_{c\alpha}},$$

$$(49) \quad \varepsilon_{xy} = -i \frac{2\pi^2}{\omega} \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \int_0^{\infty} w^2 dw \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{ku - \omega - i\nu_{\alpha} + \omega_{c\alpha}} - \frac{1}{ku - \omega - i\nu_{\alpha} - \omega_{c\alpha}} \right] a_{\alpha 1} du,$$

$$(50) \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{xx}, \quad \varepsilon_{yx} = -\varepsilon_{xy}, \quad \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = 0,$$

$$(51) \quad \varepsilon_{zz} = 1 - \frac{8\pi^2}{\omega} \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \int_0^{\infty} w dw \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_{\alpha 2} u du}{ku - \omega - i\nu_{\alpha}}.$$

La dernière expression peut s'écrire aussi sous une autre forme. En effet, remarquons qu'on a, évidemment,

$$(52) \quad \frac{u}{ku - \omega - i\nu_{\alpha}} = \frac{1}{k} \left[1 + \frac{\omega + i\nu_{\alpha}}{ku - \omega - i\nu_{\alpha}} \right].$$

Le second membre en (51) se décompose alors en deux termes dont le premier est nul, ce qu'on voit facilement en calculant l'intégrale par rapport à u avec la supposition

$$(53) \quad F_{\alpha 0}(w, u = \pm \infty) = 0.$$

De cette manière et aussi en vertu de (37), l'expression (51) deviendra

$$(54) \quad \varepsilon_{zz} = 1 - \frac{8\pi^2}{k\omega} (\omega + i\nu_{\alpha}) \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \int_0^{\infty} w dw \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial F_{\alpha 0} / \partial u}{ku - \omega - i\nu_{\alpha}} du.$$

L'expression (48) peut être transformée de la même façon. À cet effet, remarquons d'abord qu'en explicitant $a_{\alpha 1}$ en (48), on peut écrire ε_{xx} sous la forme

$$(55) \quad \varepsilon_{xx} = 1 - \frac{2\pi^2}{\omega^2} \sum_{\pm} \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \int_0^{\infty} w^2 dw \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(ku - \omega)(\partial F_{\alpha 0} / \partial w)}{ku - \omega - (i\nu_{\alpha} \mp F\omega_{c\alpha})} du - \\ - \frac{2\pi^2 k}{\omega^2} \sum_{\pm} \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \int_0^{\infty} w^2 dw \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial F_{\alpha 0} / \partial u}{ku - \omega - (i\nu_{\alpha} \mp \omega_{c\alpha})} du.$$

Or, les intégrales qui surviennent dans l'expression ci-dessus étant des intégrales définies à limites constantes, nous sommes libres d'intervertir l'ordre d'intégration. En agissant ainsi dans le seconde terme du membre droit et en tenant compte du fait qu'en supposant

$$(56) \quad F_{\alpha 0}(w = +\infty, u) = 0,$$

on a

$$(57) \quad \int_0^\infty w^2 \frac{\partial F_{\alpha 0}}{\partial w} dw = -2 \int_0^\infty w F_{\alpha 0}(w, u) dw,$$

en remarquant en même temps qu'on a

$$(58) \quad \frac{ku - \omega}{ku - \omega (i\nu_\alpha \pm \omega_{c\alpha})} = 1 + \frac{i\nu_\alpha \mp \omega_{c\alpha}}{ku - \omega - (i\nu_\alpha \mp \omega_{c\alpha})},$$

puis, en intégrant par parties par rapport à la variable u dans le troisième terme du seconde membre de l'expression (55), on obtient

$$(59) \quad \begin{aligned} \varepsilon_{xx} = & 1 - \frac{8\pi^2}{\omega^2} \sum_{\pm} \sum_{\alpha}^{\epsilon, p} \frac{e_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \int_0^\infty w dw \int_{-\infty}^\infty F_{\alpha 0}(w, u) du - \\ & - \frac{4\pi^2}{\omega^2} \sum_{\pm} \sum_{\alpha}^{\epsilon, p} \frac{e_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \int_{-\infty}^\infty w dw \int_{-\infty}^\infty \frac{(i\nu_\alpha \mp \omega_{c\alpha}) F_{\alpha 0} du}{ku - \omega - (i\nu_\alpha \mp \omega_{c\alpha})} - \\ & - \frac{2\pi^2 k^2}{\omega^2} \sum_{\pm} \sum_{\alpha}^{\epsilon, p} \frac{e_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \int_0^\infty w^2 dw \int_{-\infty}^\infty \frac{F_{\alpha 0}(w, u) du}{[ku - \omega - (i\nu_\alpha \mp \omega_{c\alpha})]^2}. \end{aligned}$$

Tous ces résultats nous permettent d'écrire explicitement l'équation de dispersion. On parvient à cette équation en annulant le déterminant du système algébrique (45) — (47). En réalité, on obtient ainsi deux équations de dispersion:

a) une première concernant les ondes longitudinales, qui, en vertu de (54), et après une intégration par parties par rapport à u , pourra s'écrire sous la forme

$$(60) \quad k^2 = \frac{8\pi^2}{\omega} \sum_{\alpha}^{\epsilon, p} \frac{e_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} (\omega + i\nu_\alpha) \int_0^\infty w dw \int_{-\infty}^\infty \left(u - \frac{\omega}{k} - \frac{i\nu_\alpha}{k}\right)^{-2} F_{\alpha 0} du;$$

b) une seconde équation, concernant les ondes transversales, qui, en négligeant le produit $\varepsilon_{xy}\varepsilon_{yx}$ (à comparer [2]) et en vertu du fait qu'on a $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy}$, s'écrira de la manière suivante

$$(61) \quad \begin{aligned} k^2 c^2 = & \omega^2 - 8\pi^2 \sum_{\alpha}^{\epsilon, p} \frac{e_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \int_0^\infty w dw \int_{-\infty}^\infty F_{\alpha 0}(w, u) du - \\ & - 4\pi^2 \sum_{\pm} \sum_{\alpha}^{\epsilon, p} \frac{e_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} (i\nu_\alpha + \omega_{c\alpha}) \int_0^\infty w dw \int_{-\infty}^\infty \left(\frac{\omega_r + i\omega_i}{k} - \frac{i\nu_\alpha}{k} \pm \frac{\omega_{c\alpha}}{k}\right)^{-1} F_{\alpha 0} du - \\ & - 2\pi^2 \sum_{\pm} \sum_{\alpha}^{\epsilon, p} \frac{e_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \int_0^\infty w^3 dw \int_{-\infty}^\infty \left(u - \frac{\omega_r + i\omega_i}{k} - \frac{i\nu_\alpha}{k} \pm \frac{\omega_{c\alpha}}{k}\right)^{-2} F_{\alpha 0} du. \end{aligned}$$

b) Transformation des équations de dispersion

Supposons maintenant, pour plus de généralité, que chaque composante du plasma est caractérisée par une distribution anisotrope de la forme

$$(62) \quad F_{\alpha 0} = F_{\alpha 0}^{(1)}(w, u) + F_{\alpha 0}^{(2)}(w, u),$$

où

$$(63) \quad F_{\alpha 0}^{(i)}(w, u) = N_i \left(\frac{m_\alpha}{2\pi T_{i\perp}} \right) \left(\frac{m_\alpha}{2\pi T_{i\parallel}} \right)^{1/2} \exp \left\{ -\frac{m_\alpha w^2}{2T_{i\perp}} - \frac{m_\alpha (u - U_i)^2}{2T_{i\parallel}} \right\},$$

les symboles qui surviennent dans cette dernière expression ayant la signification indiquée dans la première partie du présent travail.

Si l'on remplace (62), (63) dans l'équation de dispersion des ondes longitudinales (60) et si l'on effectue l'intégration par rapport à w , ce qui nous conduit à utiliser la formule

$$(64) \quad N_i \left(\frac{m_\alpha}{2\pi T_{i\perp}} \right) \int_0^\infty w \exp \left\{ -\frac{m_\alpha w^2}{2T_{i\perp}} \right\} dw = \frac{N_i}{2\pi}; \quad (i = 1, 2)$$

puis si l'on fait les mêmes manipulations que dans la première partie du présent travail, on obtient

$$(65) \quad \frac{k^2}{4\pi} = \sum_\alpha \frac{e_\alpha^2}{m_\alpha^{1/2} \omega} (\omega + i\nu_\alpha) \left[\frac{N_1}{(2\pi T_{1\parallel})^{1/2} (U_d - c_r)} I_{\alpha 1}^{(-)} + \frac{N_2}{(2\pi T_{2\parallel})^{1/2} c_r} I_{\alpha 2}^{(+)} \right].$$

L'équation des ondes transversales (61) peut être traitée de la même manière, de sorte qu'en considérant le cas particulier $U_1 = U_d$, $U_2 = 0$ et après avoir effectué l'intégration par rapport à w , en tenant compte de (64) et aussi des formules

$$(66) \quad N_i \left(\frac{m_\alpha}{2\pi T_{i\perp}} \right) \int_0^\infty w^3 \exp \left\{ -\frac{m_\alpha w^2}{2T_{i\perp}} \right\} dw = \frac{N_i T_{i\perp}}{\pi m_\alpha},$$

$$(67) \quad \left(\frac{m_\alpha}{2\pi T_{1\parallel}} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^\infty \exp \left\{ -\frac{m_\alpha}{2T_{1\parallel}} (u - U_d)^2 \right\} du = 1,$$

$$(68) \quad \left(\frac{m_\alpha}{2\pi T_{2\parallel}} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^\infty \exp \left\{ -\frac{m_\alpha}{2T_{2\parallel}} u^2 \right\} du = 1,$$

puis en introduisant les notations

$$(69) \quad \lambda_\alpha = \frac{\omega c_\alpha}{k}, \quad \Omega_{\alpha 1}^2 = \frac{4\pi N_1 e_\alpha^2}{m_\alpha}, \quad \Omega_{\alpha 2}^2 = \frac{4\pi N_2 e_\alpha^2}{m_\alpha},$$

$$(70) \quad \eta_1 = \frac{u - c_c \pm \lambda_\alpha}{U_d - c_r \mp \lambda_\alpha}, \quad \eta_2 = \frac{u - c_r \mp \lambda_\alpha}{c_r \pm \lambda_\alpha},$$

$$(71) \quad B_{\alpha 1} = \frac{m_\alpha}{2T_{2\parallel}} (U_d - c_r \mp \lambda_\alpha)^2, \quad B_{\alpha 2} = \frac{m_\alpha}{2T_{2\parallel}} (c_r \pm \lambda_\alpha)^2$$

$$(72) \quad \Gamma_{\alpha 1} = \frac{c_r + \mu_{\alpha}}{U_d - c_r \mp \gamma_{\alpha}}, \quad \Gamma_{\alpha 2} = \frac{c_i + \mu_{\alpha}}{c_r \pm \lambda_{\alpha}},$$

$$(73) \quad \mathcal{J}_{\alpha i}^{(\pm)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp \{-B_{\alpha i}(\eta_i \pm 1)^2\}}{\eta_i - i\Gamma_{\alpha i}} d\eta_i,$$

$$(74) \quad \mathcal{K}_{\alpha i}^{(\pm)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp \{-B_{\alpha i}(\eta_i \pm 1)^2\}}{(\eta_i - i\Gamma_{\alpha i})^2} d\eta_i,$$

cette équation devient

$$(75) \quad \begin{aligned} \omega^2 = & k^2 c^2 + \sum_{\alpha} (\Omega_{\alpha 1}^2 + \Omega_{\alpha 2}^2) + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\pm} \sum_{\alpha} \frac{\Omega_{\alpha}^2}{(2\pi m_{\alpha} T_{1||})^{1/2}} \left[(i\mu_{\alpha} + \lambda_{\alpha}) m_{\alpha} \mathcal{J}_{\alpha 1}^{(-)} + \frac{T_{1\perp}}{U_d - (c_r \mp \lambda_{\alpha})} \mathcal{K}_{\alpha 1}^{(-)} \right] + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\pm} \sum_{\alpha} \frac{\Omega_{\alpha 2}^2}{(2\pi m_{\alpha} T_{2||})^{1/2}} \left[(i\mu_{\alpha} + \lambda_{\alpha}) m_{\alpha} \mathcal{J}_{\alpha 2}^{(+)} + \frac{T_{2\perp}}{c_r \mp \lambda_{\alpha}} \mathcal{K}_{\alpha 2}^{(+)} \right]. \end{aligned}$$

Reçu le 28 février 1969

Université de Cluj
Faculté de physique

BIBLIOGRAPHIE

- 1] Drăganu, M., *Mathematica (Cluj)*, 7 (30), (1965), p. 5.
- [2] Harris, E. G., *Plasma Physics (J. Nucl. Energy C)*, 2, (1961), p. 138
- [3] Kahn, F. D., *Revs. Modern Phys.* 30, (1958), p. 1069.
- [4] Kellog, P., J. and Liemohn, P., *Phys Fl.* 3, (1960), p. 40
- [5] Parker, E. N., *Phys. Rev.* 112' (1958), p. 1429
- [6] Sitenko, A., T., Stepanov, K., K., *Zh. eksp. teor. fiz. (JETP)* 31, (1952), p. 642
- [7] Sudan, R. N., *Phys. Fl.* 6, (1961), p. 57.

ASUPRA UNEI APLICAȚII A SISTEMELOR DE AȘTEPTARE CU PRIORITATE ABSOLUTĂ

D. FIRESCU și ANETA MUJA

Se consideră un sistem de așteptare cu prioritate absolută cu o singură stație de serviciu, în care intră două clase de cerințe. O clasă conține un număr infinit de cerințe fără prioritate, iar a doua clasă, un număr finit N de cerințe cu prioritate absolută.

Studiul acestui sistem și al caracteristicilor sale se face în legătură cu posibilitatea de aplicare a rezultatelor obținute în două cazuri din domeniul industriei: a) cazul unei uzine în care un operator al unui tablou de control supraveghează procesul de producție; b) cazul unui centru de întreținere și reparații de pe lângă o întreprindere.

În ipoteza existenței unui regim staționar se evaluează unele caracteristici privind eficiența modelului descris, printre care lungimea medie a celor două șiruri de așteptare, timpul mediu de așteptare a cerințelor din cele două clase, etc. Se fac apoi considerații în legătură cu comportarea la limită a sistemului și se arată că unele sisteme cu prioritate absolută descrise în literatură pot fi prezentate drept cazuri limită ale sistemului pe care îl studiază lucrarea de față.

1. În general, studiile asupra modelelor de așteptare cu prioritate absolută, dintre care remarcăm, pe cele întreprinse de White și Christie [11], Stephan [8], Heathcote [3], Mihoc și Ciucu [5], Jaiswal [4], s-au bazat pe ipoteza că fiecare dintre diversele clase de prioritate conțin un număr infinit de cerințe.

În practică, însă, se întâmplă frecvent ca acea clasă care are cea mai înaltă prioritate să conțină numai un număr finit de cerințe.

Drept exemplu, vom considera următoarele două cazuri practice:

a) Să considerăm un combinat chimic, în care operatorul unui tablou de control supraveghează procesul de producție. Operatorul este solicitat să controleze, la intervale de timp stabilite, abaterile de la parametrii optimi, care apar în procesul de producție. Dacă aceste abateri, depășesc o anumită limită este necesară reglarea cu ajutorul operatorului. Cele mai multe dintre aceste cereri de reglare au un caracter „obișnuit”, în sensul că se fac cheltuieli destul de mici pentru această reglare. Există, însă — pe lângă aceste abateri „obișnuite” și alte situații neprevăzute care pot cauza pagube mari sau chiar stagnarea liniei de producție. Numărul de semnale care indică o astfel de „stare de urgență” este el însuși mic și — mai mult — este mic în raport cu numărul de semnale ce indică reglări „obișnuite”.

Evident că cererile „de urgență” au prioritate față de cele „obișnuite”.

b) Să considerăm o mare întreprindere care își are propriul său centru de întreținere și reparații. Acest centru este solicitat să servească două clase de cerințe. O clasă de cerințe este aceea care conține un număr foarte mare de mașini și unelte ce sînt folosite mereu și care necesită operații de întreținere și reparație în mod obișnuit la anumite intervale de timp.

A doua clasă de cerințe o constituie operațiile de întreținere și reparații a acelor mașini și agregate în care s-au făcut investiții mari și care sînt folosite în mod special. Numărul acestor mașini este, în general, mic în raport cu numărul celor „obișnuite” și, cu atît mai mult cererile de reparare sînt în număr mic. Investițiile în aceste mașini fiind mari, întreprinderea este în mod deosebit interesată să le prelungească capacitatea de funcționare, proporțional cu investițiile făcute. În consecință, întreprinderea va acorda prioritate absolută cererilor de întreținere și reparație a acestora.

În cele ce urmează vom studia modelul cu prioritate absolută care se poate construi în cazul acestor două exemple și al altora asemănătoare și vom determina acele caracteristici care ne permit să apreciem eficiența practică a modelului.

2. Să considerăm un sistem de așteptare cu o singură stație de servire, în care intră un număr infinit de cerințe obișnuite și fie λ_1 și μ_1 respectiv parametrii distribuțiilor sosirilor și serviciilor acestor cerințe. Să mai presupunem că în acest sistem sosesec de asemenea cel mult N cerințe cu prioritate absolută, avînd parametrii distribuțiilor sosirilor și serviciilor λ_2 și μ_2 respectiv.

Sosirile cerințelor din ambele clase urmează o lege Poisson, iar serviciile urmează o lege exponențială negativă. În interiorul fiecăruia din cele două șiruri de așteptare se respectă disciplina „primul venit, primul servit”.

Dacă în momentul sosirii unei cerințe cu prioritate, o cerință obișnuită este în curs de servire în stație, serviciul acesteia din urmă se întrerupe și locul ei în stație îl ia cerința cu prioritate. Cerința care și-a întrerupt serviciul se așază, pentru a aștepta reîntrarea în stație, pe primul loc în șirul de așteptare al cerințelor obișnuite.

Mai observăm că fiind un regim de priorități absolute, șirul cerințelor cu prioritate este independent de cel al cerințelor obișnuite.

Fie $n(n = 0, 1, 2, \dots, N)$ numărul de cerințe care sînt servite cu prioritate, existente la momentul t în sistem și $m(m = 0, 1, \dots)$ numărul de cerințe obișnuite care se află la același moment t în sistem. Să notăm cu $p_{n,m}$ probabilitatea ca în regim staționar sistemul să se afle în starea $E_{n,m}$.

Ecuatiile de stare în regim permanent sînt:

$$(\lambda_1 + N\lambda_2)p_{00}\mu_1 + p_{01} + \mu_2 p_{10} \quad (m = n = 0)$$

$$(\lambda_1 + \mu_1 + N\lambda_2)p_{0m} = \mu_1 p_{0,m+1} + \lambda_1 p_{0,m-1} + \mu_2 p_{1m} \quad (n = 0, m > 0)$$

$$[\lambda_1 + \mu_2 + (N - n)\lambda_2]p_{n0} = (N - n + 1)\lambda_2 p_{n-1,0} + \mu_2 p_{n+1,0} \quad (m = 0, n < N)$$

$$(\lambda_1 + \mu_2)p_{N,0} = \lambda_2 p_{N-1,0} \quad (m = 0, n = N)$$

$$[\lambda_1 + \mu_2 + (N - n)\lambda_2]p_{nm} = \mu_2 p_{n+1,m} + \lambda_1 p_{n,m-1} + \lambda_2 (N - n + 1)p_{n-1,m} \quad (m > 0, n < N)$$

$$(\lambda_1 + \mu_2)p_{Nm} = \lambda_1 p_{Nn-1} + \lambda_2 p_{N-1,m} \quad (m > 0; n = N)$$

Să studiem câteva caracteristici ale sistemului. Dacă p_n este probabilitatea ca n cerințe cu prioritate să aștepte terminarea serviciului, în ipoteza că și cerința din stație este inclusă în șir, atunci

$$p_n = \sum_{m=0}^{\infty} p_{nm}$$

Pe de altă parte, se știe că

$$p_u = \frac{P(N-u, \rho_2^{-1})}{P(N, \rho_2^{-1})}$$

unde

$$\rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2},$$

$$p(u, \alpha) = \frac{\alpha^u}{u!} e^{-\alpha}$$

și

$$P(u, \alpha) = \sum_{i=0}^u p(i, \alpha)$$

Perioada de timp în care stația este ocupată cu servirea cerințelor cu prioritate, T_2 , este

$$T_2 = 1 - p_u.$$

sau, folosind notațiile de mai sus,

$$T_2 = 1 - \frac{p(N-u, \rho_2^{-1})}{P(N, \rho_2^{-1})} = \frac{P(N-1, \rho_2^{-1})}{P(N, \rho_2^{-1})} \quad (2.1)$$

Găsim de asemenea că valoarea medie $E(n)$ și dispersia $\sigma^2(n)$ a numărului de cerințe cu prioritate din sistem sînt date de expresiile

$$E(n) = N - T_2 \rho_2^{-1} \quad (2.2)$$

$$\sigma^2(n) = (T_2 - T_2^2 - p_n \cdot \rho_2^{-2} + T_2 \rho_2^{-1}) \quad (2.3)$$

iar timpul mediu de așteptare este

$$W_u = \frac{N \rho_2 - T_2}{\lambda_2 T_2} \quad (2.4)$$

Numărul mediu de sosiri a cerințelor cu prioritate, în unitatea de timp este $(N - E(n)) \lambda_2$, iar numărul mediu de cerințe cu prioritate servite în unitatea de timp este $T_2 \mu_2$. Evident, în cazul echilibrului, aceste două expresii sînt egale, ceea ce ne conduce la relația (2.2). Deasemenea pentru a obține formula (2.4) este suficient să împărțim ambii membri ai relației (2.2.) prin $T_2 \mu_2$, deoarece $W_n = \frac{E(n)}{T_2 \mu_2}$.

Dacă notăm prin $p_{\cdot m}$ probabilitatea ca în șirul de așteptare să fie m cerințe fără prioritate, atunci

$$p_{\cdot m} = \sum_{n=0}^N p_{nm}.$$

Pe de altă parte, din ecuațiile de stare ale sistemului se deduc relațiile

$$\lambda_1 p_{\cdot m} = \mu_1 p_{0, m+1}, \quad (m \geq 0) \quad (2.5)$$

de unde, însumând după m , rezultă

$$\lambda_1 = \mu_1 \sum_{m=1}^{\infty} p_{0m}. \quad (2.6)$$

Deoarece

$$\sum_{m=1}^{\infty} p_{0m} = T_1,$$

unde T_1 este perioada de timp în care stația este ocupată cu servirea cerințelor fără prioritate, deducem

$$T_1 = \rho_1 = p_{0\cdot} - p_{00} \quad \left(\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} \right). \quad (2.7)$$

Din (2.1) și (2.7) rezultă

$$p_{00} = 1 - T_1 - T_2$$

ceea ce se prevedea în mod intuitiv.

Dacă

$$1 - T_1 - T_2 > 0$$

sistemul se află în stare de „nesaturație“.

Notînd prin $E_{\cdot}(m)$ valoarea medie a numărului de cerințe fără prioritate din șir, în ipoteza că n cerințe cu prioritate așteaptă intrarea în stația de serviciu, avem

$$E_{\cdot}(m) = p^{-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} n p_{nm}. \quad (2.8)$$

Iar

$$E(m) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^N n p_{nm} = \sum_{m=0}^{\infty} m p_{\cdot m} = \sum_{n=0}^N E_{\cdot}(m) p_{\cdot n}. \quad (2.9)$$

Inmulțind (2.5) cu m și sumînd după m obținem

$$\sum_{m=0}^{\infty} m \lambda_1 p_{\cdot m} = \mu_1 m p_{\cdot m} - \sum_{m=1}^{\infty} \mu_1 p_{0m}. \quad (2.10)$$

Din (2.6), (2.8) și (2.9) deducem

$$\lambda_1 E(m) = \mu_1 E_0(m) p_0 - \lambda_1 \quad (2.11)$$

Așadar

$$p_0 \cdot E_0(m) = T_1[E(m) + 1] \quad (2.12)$$

Între valorile medii $E_n(m)$ se pot stabili relații de recurență, dacă folosim ecuațiile de stare ale sistemului.

Înmulțind cu m ecuațiile

$$(\lambda_1 + \mu_1 + N\lambda_2) p_{0,m} = \mu_1 p_{0,m+1} + \mu_2 p_{1,m} + \lambda_1 p_{0,m-1} \quad (m > 0)$$

și

$$[\lambda_1 + \mu_2 + (N - n)\lambda_2] p_{n,m} = \lambda_1 p_{n,m-1} + \lambda_2(N - n + 1) p_{n-1,m} + \mu_2 p_{n+1,m} \quad (m > 0, n < N)$$

și sumînd apoi după m , obținem

$$N\lambda_2 p_0 \cdot E_0(m) = \mu_2 p_1 \cdot E_1(m) - \lambda_1(1 - p_0) \quad (2.13)$$

și

$$[\mu_2 + (N - n)\lambda_2] p_n \cdot E_n(m) = p_{n+1} \cdot E_{n+1}(m) + (N - n + 1)\lambda_2 p_{n-1} \cdot E_{n-1}(m) + \lambda_1 p_n \quad (0 < n < N) \quad (2.14)$$

Din relațiile (2.12), (2.13) și (2.14) rezultă:

$$p_n \cdot E_n(m) = \frac{N!}{(N - n)!} \rho_2^n T_1[E(m) + 1] + \frac{\lambda_1}{\mu_2} \sum_{i=1}^n \frac{(N - i)!}{(N - n)!} \rho_2^{n-i} \sum_{j=i}^N p_j \quad (0 \leq n \leq N) \quad (2.15)$$

În (2.15) sumăm după n și obținem

$$E(m) = T_1[E(m) + 1] \sum_{n=0}^N \frac{N!}{(N - n)!} \rho_2^n + \frac{\lambda_1}{\mu_2} \sum_{n=1}^N \left\{ \left(\sum_{k=n}^N p_k \right) \left[\sum_{k=n}^N \frac{(N - n)!}{(N - k)!} \rho_2^{k-n} \right] \right\} \quad (2.16)$$

Introducînd funcția generatoare cumulănt

$$P_n^* = \sum_{k=n}^N p_k = \frac{P(n - n, \rho_2^{-1})}{P(N, \rho_2^{-1})} \quad (2.17)$$

obținem în definitiv

$$E(m) = \frac{T_1 + (1 - T_2) \frac{\lambda_1}{\mu_2} \sum_{n=1}^N \frac{P_n^*}{p_n}}{1 - T_1 - T_2} \quad (2.18)$$

Așadar, lungimea medie a șirului de așteptare format din cerințe fără prioritate este

$$E(m) - T_1 = \frac{T_1^2 + T_1 T_2 + (1 - T_2) \frac{\lambda_1}{\mu_2} \sum_{n=1}^N \frac{P_n^*}{p_n}}{1 - T - T_2} \quad (2.19)$$

Deosebim cazurile

i) $N = 0$

Evident $T_2 = 0$ și (2.19) se reduce la formula cunoscută.

$$E(m) - T_1 = \frac{T_1^2}{1 - T_1} \quad (2.20)$$

ii) $N = 1$

În acest caz, $T_2 = p_1 = 1 - p_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu_2}$

și

$$E(m) = \frac{\lambda_1 p_0 p_1 + T_1 \mu_2}{\mu_2 (p_0 - T_1)} \quad (2.21)$$

Relația (2.21) a fost dedusă direct de White și Christie [11]. Observăm că acest caz coincide cu următorul model de așteptare. Cerințele sosesc în sistem urmînd o lege Poisson cu parametrul λ_1 , fiind servite după o lege exponențială cu parametrul μ_1 . Stația de serviciu poate ea însăși să se defecteze după o lege exponențială cu parametrul λ_2 ; îndată ce se defectează începe o activitate de reparare a ei cu intensitatea μ_2 .

iii) $N \rightarrow \infty$, $\lambda_2 \rightarrow 0$, $N\lambda_2 \rightarrow \mu$. ($0 < \mu < \mu_2$)

Avem

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{\mu}{\mu_2}, \\ p_n &= (1 - T_2) T_2^n, \\ P_n^* &= T_2^n \end{aligned}$$

și deci

$$E(m) = \frac{T_1 (1 - T_2) \frac{\lambda_1}{\mu_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_2^{2n}}{T_2^n (1 - T_2)}}{1 - T_1 - T_2},$$

adică

$$E(m) = \frac{T_1 \mu_2 (1 - T_2) + \lambda_1 T_2}{\mu_2 (1 - T_2) (1 - T_1 - T_2)} \quad (2.22)$$

relație dedusă pe altă cale de White și Christie [11].

Timpul mediu de așteptare, W_m , a cerințelor fără prioritate este

$$W_m = \frac{E(m)}{\lambda_2}.$$

Momentul de ordinul doi $E(m^2)$ se găsește pe o cale asemănătoare cu cea folosită pentru determinarea valorii medii $E(m)$.

Fie

$$E_n(m^2) = \frac{1}{p_{n,m}} \sum_{m=0}^{\infty} m^2 p_{n,m}, \quad (2.23)$$

$$E(m^2) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^N m^2 p_{n,m} = \sum_{m=0}^{\infty} m^2 p_{\cdot,m} = \sum_{m=0}^N E_n(m^2) p_n. \quad (2.24)$$

Înmulțind (2.5) cu m^2 și sumând după m , rezultă

$$\sum_{m=0}^{\infty} m^2 \lambda_1 p_{\cdot,m} = \sum_{m=1}^{\infty} (m-1)^2 \mu_1 p_{0,m}, \quad (2.25)$$

iar din (2.12), (2.23), (2.24) și (2.25) obținem

$$p_0 E_0(m^2) = T_1 [E(m^2) + 2E(m) + 1], \quad (2.26)$$

care este analoagă cu (2.12).

Relațiile de recurență între $E_n(m^2)$ se stabilesc în același mod în care s-au dedus (2.13) și (2.14). Rezultă

$$N\lambda_2 p_0 E_0(m^2) = \mu_2 p_1 E(m^2) - 2\mu_1 p_0 E_0(m^2) + 2\lambda_1 p_0 E_0(m^2) + \lambda_1, \quad (n=0) \quad (2.27)$$

$$[\mu_2 + (N-n)\lambda_2] p_n E_n(m^2) = \mu_2 p_{n+1} E_{n+1}(m^2) + (N-n+1)\lambda_2 p_{n-1} E_{n-1}(m^2) + 2\lambda_1 p_n E_n(m^2) + \lambda_1 p_n \quad (0 < n < N). \quad (2.28)$$

Folosind aceste relații, în mod analog cu (2.15) se stabilește că

$$p_n E_n(m^2) = \frac{N!}{(N-n)!} \rho_2^n T_1 [E(m^2) + 2E(m) + 1] + \frac{\lambda_1}{\mu_2} \sum_{i=1}^n \frac{(N-n)!}{(N-i)!} \rho_2^{n-1} \sum_{j=i}^N [2E_j(m) + 1] p_j, \quad (0 \leq n \leq N). \quad (2.29)$$

Substituind produsul $p_j E_j(m)$ din (2.15) în (2.29) și sumând apoi după n obținem

$$E(m^2) = E(m) + \frac{2}{1-T_1-T_2} \times \\ \times \left\{ E(m) T_1 + [E(m) + 1] T_1 \frac{\lambda_1}{\mu_1} \sum_{n=1}^N \frac{P_n^{*2}}{p_n} + \right. \\ \left. + (1-T_2) \left(\frac{\lambda_1}{\mu_2} \right)^2 \left[\sum_{n=1}^N \frac{P_n^{*3}}{p_n^3} + 2 \sum_{n=1}^N \frac{P_n^{*2}}{p_n^2} \sum_{j=n+1}^N \frac{P_j^{*2}}{p_j} \right] \right\}.$$

Vom studia și aici cele trei cazuri particulare de mai sus.

j) $N = 0$

deci $T_2 = 0$ și

$$E(m^2) = \frac{T_1(1 + T_1)}{(1 + T_1)^2}$$

iar

$$\sigma^2(m) = \frac{T_1}{(1 - T_1)^2},$$

ceea ce se cunoaște

jj) $N = 1, \quad T_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu_2}.$

Avem

$$E(m^2) = E(m) + 2 \frac{T_1 \mu_2 [E(m)(\mu_2 + \lambda_1 p_{1\cdot}) + \lambda_1 p_{1\cdot}] + p_{0\cdot} p_{1\cdot}}{\mu_2^2 (p_{0\cdot} - T_1)} \quad (2.30)$$

Din (2.30) și (2.21) obținem

$$\sigma^2(m) = \frac{2\lambda_1^2 p_{0\cdot}^2 p_{1\cdot}}{\mu_2^2 (p_{0\cdot} - T_1)} + \frac{\mu_2 + \lambda_1 p_{1\cdot}) (\mu_2 T_1 + \lambda_1 p_{0\cdot} p_{1\cdot}) p_{0\cdot}}{\mu_2^2 (p_{0\cdot} - T_1)^2}$$

jjj) $N \rightarrow \infty, \quad \lambda_2 \rightarrow 0, \quad N\lambda_2 \rightarrow \mu \quad (0 < \mu < \mu_2)$

În acest caz

$$E(m^2) = \frac{2T_2\lambda_1^2}{\mu_2^2(1 - T_2)^3(1 - T_1 - T_2)} + \\ + \frac{2\lambda_1^2 T_2^3 + \mu_2 T_1(1 - T_2)[\lambda_1(1 - T_2 - 3T_1) + \mu_2(1 - T_2)(1 - T_1 - T_2)]}{\mu_2^2(1 - T_2)^2(1 - T_1 - T_2)^2}$$

și

$$\sigma^2(m) = \frac{2T_2\lambda_1^2}{\mu_2^2(1 - T_2)^3(1 - T_1 - T_2)^2} + \\ + \frac{\lambda_1^2 T_2^3 + \mu_2 T_1(1 - T_2)[\lambda_1 T_2(1 - T_1 - T_2) + \mu_2(1 - T_2)^2]}{\mu_2^2(1 - T_2^2)(1 - T_1 - T_2)^2}.$$

În încheiere, să observăm că putem determina caracteristicile sistemelor de așteptare cu prioritate absolută în care atât cerințele fără prioritate cât și cele cu prioritate sînt în număr nelimitat, considerînd aceste sisteme drept cazuri limită ale celui studiat.

Într-adevăr, păstrînd notațiile de mai sus și făcînd $N \rightarrow \infty$, ecuațiile de stare ale sistemului în regim permanent se scriu

$$(\lambda_1 + \lambda_2) p_{00} = \mu_1 p_{10} + \mu_2 p_{10} \quad (m = n = 0)$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1) p_{0m} = \mu_1 p_{0,m+1} + \lambda_1 p_{0,m-1} + \mu_2 p_{1m} \quad (m = 0, m > 0)$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2) p_{n0} = \lambda_2 p_{n-1,0} + \mu_2 p_{n+1,0} \quad (m = 0, n > 0)$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2) p_{nm} = \mu_2 p_{n+1,m} + \lambda_2 p_{n-1,m} + \lambda_1 p_{n,m-1} \quad (m, n > 0)$$

Introducînd funcția generatoare

$$G(z, u) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} p_{nm} z^n u^m, \quad |z| \leq 1, |u| \leq 1,$$

rezultă

$$G(z, u) = \frac{1 - \rho_1 - \rho_2}{1 - v - \rho_2 z} \cdot \frac{1 - v}{1 - vu}$$

unde

$$v = \frac{\mu_2 + \lambda_2 + \lambda_1(1-z) - \sqrt{[\mu_2 + \lambda_2 + \lambda_1(1-z)]^2 - 4\lambda_2\mu_2}}{2\mu_2}.$$

De aici, găsim

$$E(n) = \left. \frac{\partial G}{\partial u} \right|_{z=u=1} = \frac{\rho_2}{1 - \rho_1}$$

și

$$E(m) = \left. \frac{\partial G}{\partial z} \right|_{z=u=1} = \frac{\rho_1[\mu_1 + E(n)\mu_2]}{\mu_1(1 - \rho_1 - \rho_2)}$$

așa cum rezultă imediat din (2.2) și (2.18).

CONCLUZIE

Modelul studiat mai sus își găsește aplicație directă atît în cazurile practice considerate de noi cît și în altele asemănătoare. Caracteristicile modelului ne dau indicații precise asupra eficienței sale, dacă se evaluează corect factorii de serviciu ρ_1 și ρ_2 . Admițînd că parametrii serviciilor μ_1 și μ_2 sînt cunoscuți, vom indica, pe scurt, — folosind terminologia din problemele de uzură a utilajelor — modul în care putem determina corect parametrii λ_1 și λ_2 .

Introducem notațiile:

$v(t)$ — numărul de utilaje de un tip oarecare ce „supraviețuiesc” la momentul t ;

T — timpul scurs de la momentul inițial de dare în exploatare a unui utilaj;

$s(t)$ — probabilitatea de supraviețuire a unui utilaj;
 $\lambda(t) dt$ — probabilitatea condiționată ca un utilaj care a atins vechimea t fără avarie, să aibă un defect în intervalul de timp $(t, t + dt)$.

Avem

$$s(t) = \frac{\partial(t)}{v(o)}$$

pe care o presupunem continuă. Rezultă că

$$\mathcal{P}\{T < t\} = 1 - s(t) = f(t)$$

deoarece

$$\mathcal{P}\{T \geq t\} = s(t)$$

Dacă $g(t)$ este densitatea de probabilitate a variabilei aleatoare T și deci

$$\mathcal{P}\{t \leq T < t + dt\} = g(t) dt$$

avem

$$g(t) = \frac{df(t)}{dt} = - \frac{ds(t)}{dt}$$

Pe de altă parte putem scrie

$$\mathcal{P}\{t \leq T < t + dt\} = \mathcal{P}\{T \geq t\} \lambda(t) dt,$$

sau, ținând seama de cele de mai sus,

$$\lambda(t) = - \frac{s'(t)}{s(t)}.$$

$\lambda(t)$ este ritmul de avarie și ea dă o măsură a riscului de a se produce un defect în cazul unui utilaj.

Dacă $\lambda(t) = \lambda$ (constant), rezultă $s = e^{-\lambda t}$ ceea ce arată că un ritm de avarie constant corespunde unei funcții de supraviețuire exponențiale.

În cazul când ritmul de avarie este proporțional cu timpul

$$\lambda(t) = \lambda t$$

rezultă

$$s(t) = e^{-\frac{\lambda}{2} t^2}.$$

Este interesant să observăm că dacă $s = e^{-\lambda t}$ avem

$$E(T) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}.$$

Rezultatele de mai sus, pe de o parte confirmă justetea ipotezei făcute asupra fluxului de intrare a cerințelor în sistemul de așteptare, iar pe de altă parte, ne dau indicații directe pentru determinarea parametrilor distribuțiilor sosirilor celor două clase de cerințe.

Primit la 15 mai 1969

Universitatea București
Facultatea de chimie

БИБЛИОГРАФИЕ

1. Gnedenko B. V, Kovalenko I, N.: Lecții po teorii massovovo obslujivaniia, Kiev, 1963.
2. Gaver D. P. Jr.: A Waiting line problem with interrupted service including priorities, J. Roy, Stat Soc. B. 25, 1963 pp. 489—499.
3. Heathcote G. R. The Time-Dependent Problem for a Queue with Preemptive Priorities, Opns. Res 7, 1959, pp. 670—680.
4. Jaiswal N. K. Preemptive Resume Priority, Queue, Opns Res vol. 9 nr. 5, 1961 pp. 732—742.
5. Mihoc Gh. Ciucu G.: Introducere in teoria așteptării. Ed. Tehnică, București 1967.
6. Miller R. G.: Priority Queues, Ann. Math. Stat, 31. 1960 pp. 86—103.
7. Parzen E.: Modern Probability Theory and its Applications New York, Wiley 1960.
8. Stephan F. F.: Two Queues under Preemptive Priority with Poisson Arrival and service Rates, Opns. Res. 6, 1958, pp 399—418.
9. Takacs L.: Introduction to the theory of queues, Oxford Univ. Press, New York 1962.
10. Welch P. D.: On Preemptive Resume Priority Queues, Ann Math Stat. nr. 2 col. 25, 1964.
11. White H, Christie L. S.: Queueing with Preemptive Priorities or with Breakdown,

ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С АБСОЛЮТНЫМ ПРИОРИТЕТОМ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Рассматривается однолинейная система массового обслуживания с абсолютным приоритетом, обслуживающим требования двух классов: а) бесконечного числа требований без приоритета; б) конечного числа И требований с абсолютным приоритетом.

Результаты такого исследования могут быть применены в промышленности.

В работе определяются, предполагая процесс стационарным, некоторые характеристики данной системы: средняя длина очереди, среднее время ожидания и др. Исследование поведения такой системы в пределе позывает, что некоторые системы массового обслуживания с абсолютным приоритетом, приведенные в литературе (4, 5, 11), являются предельными случаями рассматриваемой в настоящей работе системы массового обслуживания.

SUR UNE APPLICATION DE LA THÉORIE DES FILES D'ATTENTE À PRIORITÉ ABSOLUE**R É S U M É**

On considère un système d'attente à une seule station, dans laquelle le service des clients est fait en accord avec la priorité absolue. Les clients qui ont priorité absolue sont en nombre fini N , les autres en nombre infini.

On calcule les caractéristiques du modèle dans le régime stationnaire et l'on fait des considérations concernant son comportement aux limites.

On démontre que les résultats obtenus ont une ample application dans l'industrie.

ÜBER DIE STABILITÄT DER ALLSEITIG FREI DREHBAR GELAGERTEN TRAPEZPLATTE

V. ILLE und G. BÂRSAN

Es wird die kritische Last für die elastisch-isotrope, allseitig frei drehbar gelagerte und an zwei Rändern durch gleichmäßig verteilte Druckkräfte p je Einheit der Randlänge belastete Trapezplatte bestimmt (Abb. 1). Zur

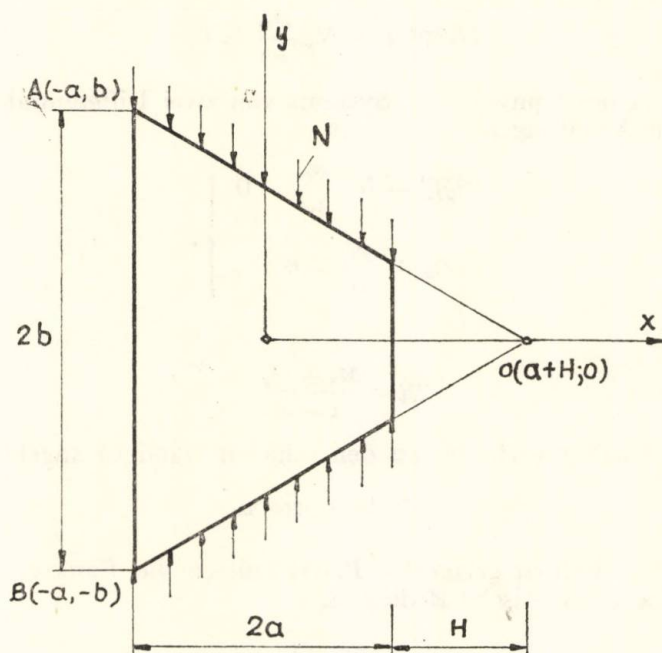


Abb. 1

Lösung wird die Variationsmethode von Galerkin [3] herangezogen. Hieraus erhält man die Ansätze für die kritische Last, im Sonderfalle der allseitig frei drehbar gelagerten Dreieck — und Rechteckplatte.

1. Im gewählten cartesischen Koordinatensystem wird die Platte durch die Geraden

$$\begin{aligned}x &= \pm a, \\y &= \pm \varphi(x)\end{aligned}\tag{1}$$

begrenzt, wobei

$$\varphi(x) = k(x + a) - b\tag{2}$$

und

$$k = \varphi'(x) = \frac{b}{2a + H}.\tag{3}$$

Die Dreieckplatte entspricht dem Sonderfall $H = 0$, während man die Rechteckplatte für $H = \infty$ erhält.

2. Die Differentialgleichung für die Stabilität der an zwei Rändern durch gleichmäßig verteilte Randdruckkräfte belasteten Platte kann folgendermaßen geschrieben werden [4]:

$$D\nabla^2\nabla^2 w + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0,\tag{4}$$

oder in Form eines äquivalenten Systems von zwei Differentialgleichungen mit partiellen Ableitungen:

$$\left. \begin{aligned}\nabla^2 \mathfrak{M} - N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= 0 \\ \nabla^2 w + \frac{\mathfrak{M}}{D} &= 0\end{aligned}\right\},\tag{5}$$

wobei

$$\mathfrak{M} = \frac{M_x + M_y}{1 + \mu}\tag{6}$$

und die gleichmäßig verteilte, an den schiefen Rändern angebrachte Last

$$N = N_y \cos \alpha.\tag{7}$$

Bei der frei drehbar gelagerten Platte müssen die Funktionen w und $\mathfrak{M}$ allseitig die kinematische Bedingung

$$w = 0\tag{8}$$

und die globale statische Bedingung

$$\mathfrak{M} = 0\tag{9}$$

befriedigen.

3. Ausgehend vom Grundprinzip der Galerkin'schen Variationsmethode, welche zur Bestimmung der Eigenwerte des Gleichungssystems (5) verwendet wird, müssen die Funktionen $\mathfrak{M}$ und w so gewählt werden, dass sie den kinematischen und statischen Randbedingungen entsprechen, u. zw. in Form von endlichen Summen:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{M} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \Phi_{ij}(x, y) \\ w &= \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m b_{kl} \psi_{kl}(x, y) \end{aligned} \right\}, \quad (10)$$

wobei a_{ij} , b_{kl} nicht bestimmte Koeffizienten sind und die Funktionen Φ_{ij} , ψ_{kl} jeweils den Randbedingungen genügen.

Bei der Lösung der Aufgabe wird dem physischen Aspekt derselben Rechnung getragen, so daß bei $i = j = k = l = 1$ für $\Phi_{11} = \psi_{11}$ sich folgende Form ergibt:

$$\Phi_{11} = g_1(x) f_1(x, y), \quad (11)$$

wobei

$$g_1(x) = x^4 - 6a^2x^2 + 5a^4, \quad (12)$$

$$f_1(x, y) = y^4 - 6y^2\varphi^2(x) + 5\varphi^4(x),$$

womit die Randbedingungen (8) und (9) für sämtliche Ränder befriedigt sind.

Das Gleichungssystem (5) wird in der Variationsform von Galerkin folgendermassen geschrieben:

$$\int_{-a}^a \int_{-\varphi(x)}^{\varphi(x)} \left[\nabla^2 \mathfrak{M} - \frac{N}{\cos \alpha} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \Phi_{11}(x, y) dx dy = 0, \quad (13)$$

$$\int_{-a}^a \int_{-\varphi(x)}^{\varphi(x)} \left[\nabla^2 w + \frac{\mathfrak{M}}{D} \right] \Phi_{11}(x, y) dx dy = 0.$$

Nach Einsetzen von (10), (11), (12) in das Gleichungssystem (13) erhält man ein System linearer und homogener algebraischer Gleichungen für a_{11} und b_{11} :

$$\left. \begin{aligned} F_1(k, \eta) a_{11} - \frac{N}{\cos \alpha} F_2(k, \eta) b_{11} &= 0 \\ \frac{a^2}{D} F_3(k, \eta) a_{11} + F_1(k, \eta) b_{11} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (14)$$

wobei

$$\left. \begin{aligned} F_1(k, \eta) &= \sum_{\varepsilon=0}^4 a_{\varepsilon} k^{8-2\varepsilon} (\eta - k)^{2\varepsilon} + \sum_{\varepsilon=0}^3 a'_{\varepsilon} k^{6-2\varepsilon} (\eta - k)^{2\varepsilon} \\ F_2(k, \eta) &= \sum_{\varepsilon=0}^3 b_{\varepsilon} k^{6-2\varepsilon} (\eta - k)^{2\varepsilon} \\ F_3(k, \eta) &= \sum_{\varepsilon=0}^4 c_{\varepsilon} k^{8-2\varepsilon} (\eta - k)^{2\varepsilon} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

und

$$\eta = \frac{b}{a} \quad (16)$$

geschrieben wurde. Die Werte der Koeffizienten a_{ε} , a'_{ε} , b_{ε} und c_{ε} sind in Tafel 1 zusammengestellt.

T A F E L 1

ε	a_{ε}	$a'_{\varepsilon} = b_{\varepsilon}$	c_{ε}
0	771,580662	82,170665	22,397636
1	9187,057908	938,368380	399,574769
2	19002,188420	1780,364100	1368,913955
3	8729,600321	642,438075	1236,779182
4	642,438075	—	260,335623

Das lineare und homogene algebraische Gleichungssystem (15) wird von Null verschiedene Lösungen haben, wenn die Determinante der Koeffizienten gleich Null ist; die Bedingung

$$\Delta = 0 \quad (17)$$

führt zu einer Gleichung für N in welcher

$$N_{cr} = \frac{[F_1(\eta, k)]^2}{F_2(\eta, k) F_3(\eta, k)} \frac{D \cos \alpha}{\alpha^2} = k \frac{D \cos \alpha}{\alpha^2}, \quad (18)$$

wodurch die kritische Last für die Trapezplatte bei $0 < H < \infty$, für die Dreieckplatte bei $H = 0$ und für die Rechteckplatte bei $H = \infty$ bestimmt werden kann.

In den Tafeln 2, 3 und 4 sind die Funktionswerte für $F_1(k, \eta)$, $F_2(k, \eta)$ und $F_3(k, \eta)$ zusammengestellt, während Tafel 5 die Koeffizienten k für verschiedene Werte der Parameter α und η enthält, wobei $\alpha = \frac{H}{a}$ ist.

T A F E L 2
Die Funktionswerte $F_1(k, \eta)$

$\eta \backslash \alpha$	0,5	1,0	1,5	2,0	3,0
0	1,425350	203,539961	4392,574094	41766,206507	1021651,2117
0,1	1,488093	207,374948	4490,975317	41988,029703	1023152,6574
0,3	1,637141	218,216853	4617,710631	42816,467149	1036697,0108
0,5	1,783424	228,929534	4786,875029	44037,834998	1059499,7081
1,0	2,207910	263,015903	5306,497738	47990,635366	1138150,9006
1,5	2,653440	300,111065	5891,950759	52561,678146	1231926,2990
2,0	3,096480	337,811816	6553,978318	57366,581481	1332070,4333
3,0	3,913011	410,698409	7698,778515	67017,728058	1536665,2341
5,0	5,288912	536,829920	9749,729314	83677,744152	1920253,1825
∞	12,547619	1284,876150	23782,756548	205580,184000	4683373,5668

T A F E L 3
Die Funktionswerte $F_2(k, \eta)$

$\eta \backslash \alpha$	0,5	1,0	1,5	2,0	3,0
0	0,840438	53,802206	612,840206	3443,341210	39221,808500
0,1	0,904048	57,859128	659,050419	3711,978276	42179,241768
0,3	1,040060	67,603885	757,663807	4259,550372	48525,039397
0,5	1,185559	75,875795	864,272726	4856,050870	55313,454437
1,0	1,574011	100,737489	1147,461041	6447,183852	73437,506265
1,5	1,974837	126,390575	1439,656201	8088,933644	92138,038758
2,0	2,369211	151,629488	1740,374338	9704,286482	110537,898805
3,0	3,084295	198,546920	2261,573514	12707,002899	144740,707462
5,0	4,271244	274,671012	3127,084114	17562,402086	200234,970432
∞	10,038095	642,438075	7317,771198	41116,036800	468337,356675

T A F E L 4
Die Funktionswerte $F_3(k, \eta)$

$\eta \backslash \alpha$	0,5	1,0	1,5	2,0	3,0
0	0,050171	12,843755	329,194528	3288,001165	84267,872607
0,1	0,054314	13,904813	356,364440	3559,627865	91229,380169
0,3	0,063353	16,218368	415,659199	4151,903017	106408,752843
0,5	0,073245	18,750708	480,561189	4800,191882	123023,668817
1,0	0,100810	25,807562	661,418387	6606,718248	169323,106920
1,5	0,130999	33,535966	859,482064	8585,130505	220027,601014
2,0	0,162372	41,567694	1075,691250	10641,307206	272725,073916
3,0	0,224840	57,559195	1475,179220	14735,153933	377645,894451
5,0	0,334468	86,170406	2202,565581	21988,185326	565362,665214
∞	1,016931	260,334283	6672,082868	66645,576448	1708053,230763

T A F E L 5
Die Werte des Koeffizienten k

$\eta \backslash \alpha$	0,5	1,0	1,5	2,0	3,0
0	48,1820	59,9525	95,6397	154,0771	315,8025
0,1	45,0980	53,4534	85,8753	133,4261	272,0491
0,3	40,6768	43,4308	67,7079	103,6599	208,1423
0,5	36,6276	36,8369	55,1702	83,1975	164,9614
1,0	30,7221	26,6088	37,1024	54,0701	104,1755
1,5	27,2157	21,2490	28,0558	38,7825	74,8601
2,0	24,9242	18,1055	22,9446	31,8683	58,8597
3,0	22,0797	14,7594	17,7659	23,9873	43,1999
5,0	19,8967	12,1759	13,8012	18,1320	32,5724
∞	15,4234	9,8710	11,5847	—	—

Eingegangen am 30. August 1969

Technische Hochschule Cluj
Fakultät für Bauwesen

L I T E R A T U R

- [1] Ilie V.: O metodă de calcul pentru placa plană trapezoidală simplu rezemată pe laturile neperalele, Buletin Științific I.P.C., Nr. 13, 1969.
- [2] Ilie V. și Bârsan G.: Stabilitatea plăcilor plane oblice simplu rezemate pe contur, Buletinul Științific I.P.C., Nr. 11, 1968.
- [3] Канторович Л. В., Крылов В. И.; Приближенные методы высшего анализа, Физматгиз, Москва, 1962.
- [4] Timoshenko S. P., Gere J. M.: Theory of Elastic Stability, Mc. Graw — Hill Book, Company, INC, 1961.

BASES DE L'ALGÈBRISATION DE LA LOGIQUE TRIVALENTE

P. JANIN

L'ensemble des formules du calcul propositionnel à trois valeurs présenté ici, peut recevoir, après passage au quotient par une relation d'équivalence, une structure d'anneau où, pour tout x , $x^3 = x$ et $3x = 0$.

§ 0 — Introduction

Dans [1], nous avons montré qu'un anneau, dont tout élément x satisfait l'égalité $x^n = x$, (n étant un entier fixé) peut recevoir une structure de treillis, de telle façon que pour $n = 2$, on retombe sur la structure classique de treillis booléen.

Dans le cas où $n = 3$, les infimum et supremum sont donnés par les formules suivantes (si de plus l'anneau est de caractéristique 3):

$$1) \inf(x, y) = x^2y^2 - x^2y - xy^2 - xy$$

$$2) \sup(x, y) = -x^2y^2 + x^2y + xy^2 + xy + y$$

Il était tentant de rechercher si les résultats classiques de l'algébrisation de la logique binaire pouvaient être prolongés de façon naturelle. Nous avons obtenu le résultat indiqué dans le résumé ci-dessus. Dans l'anneau quotient des formules, les infimum et supremum donnés par les formules (1) et (2) représentent alors la conjonction et la disjonction logique transportées à cet anneau quotient.

Pour les propriétés du treillis ainsi obtenu pour les classes de formules, nous renvoyons à [1] et [2].

Pour l'élaboration du système d'axiomes, nous nous sommes inspirés de [3]. Nous renvoyons à cette référence pour les notions classiques de variable propositionnelle, de connecteur, de formule, de démonstration formelle, de formule démontrable (ou thèse) et de règle dérivée. Les définitions de ces notions dans le calcul ternaire exposé ici, se transposeront aisément au cas binaire.

Nous remercions vivement Monsieur le Professeur GR. C. MOISIL pour les suggestions et remarques qu'il a bien voulu nous faire.

§ 1 — Axiomes et règles

Pour l'intelligibilité du système d'axiomes, le lecteur aura intérêt à se reporter à l'annexe IV, où sont données les tables de valeurs de vérité des connecteurs. Ces tables sont données à titre indicatif, sans aucun rôle démonstratif dans le présent travail. Il est clair que pour les retrouver, on devra construire les homomorphismes de l'anneau quotient des formules dans $\mathcal{Q}/(3)$, ce qui sera fait ultérieurement.

AXIOMES

Les variables propositionnelles sont notées x, y, z , etc ...

- S1 $(x \rightarrow y) \rightarrow ((x \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow y \wedge z))$
- S2 $x \wedge y \rightarrow x$
- S3 $x \wedge y \rightarrow y$
- S4 $(x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow x) \rightarrow (x \leftrightarrow y))$
- S5 $(x \leftrightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$
- S6 $(x \leftrightarrow y) \rightarrow ((x \leftrightarrow y) \rightarrow (Nx \leftrightarrow Ny))$
- S7 $(x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z))$
- S8 $x \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow y)$
- S9 $(x \rightarrow y) \leftrightarrow (\neg x \vee y) \vee (Nx \wedge Ny)$
- S10 $(\neg x \rightarrow \neg y) \rightarrow (y \rightarrow x)$
- S11 $\neg(x \vee y) \leftrightarrow (\neg x \wedge \neg y)$
- S12 $\neg \neg x \leftrightarrow x$
- S13 $N \neg Nx \leftrightarrow \neg N \neg x$
- S14 $NNx \leftrightarrow x$
- S15 $Nx \rightarrow (\neg x \rightarrow x)$
- S16 $x \rightarrow (y \rightarrow (Nx \rightarrow Ny))$
- S17 $Nx \rightarrow (Ny \rightarrow N(x \wedge y))$
- S18 $Nx \rightarrow (Ny \rightarrow N(x \vee y))$

RÈGLES

On se donnera les mêmes règles qu'en logique classiques, c'est à dire:

- R.1. La règle de substitution (son usage ne sera pas signalé explicitement en général)
- R.2. La règle de modus ponens, notée M.P.

REMARQUE 1

On pourrait affaiblir S12, et prendre:

$$S' 12: (\neg \neg x \rightarrow (\neg \neg x \rightarrow x)) \rightarrow (\neg \neg x \rightarrow x)$$

En utilisant alors la thèse T11, on démontrerait S12. Cet affaiblissement ne donnant pas un axiome très intelligible, nous l'avons négligé.

Un travail de recherche reste à faire, en particulier sur l'indépendance des axiomes S6, S16, S17, et S18.

REMARQUE 2

Les axiomes autres que S15 seraient vérifiés dans la logique à deux valeurs, dont ils constituent une axiomatique en identifiant les connecteurs $\neg$ et N. 11 n'en est pas de même de S15, qui n'est donc pas conséquence des autres axiomes, et interdit l'identification des connecteurs $\neg$ et N, en même temps qu'une interprétation „dégénérée“ du système d'axiomes.

§ 2 — Thèses usuelles

Pour alléger la présentation, et faciliter le repérage des références, nous avons groupé les règles dérivées (annexe I), les lemmes de calcul (annexe II), les théorèmes (annexe III). Le lecteur pourra s'assurer qu'il n'y a pas de circularité.

$$\underline{T1: (x \leftrightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow y)}$$

Par S7:

$$((x \leftrightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)) \rightarrow (((x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x) \rightarrow (x \leftrightarrow y)) \rightarrow \rightarrow ((x \rightarrow y) x \rightarrow (x \rightarrow y)))$$

Par MP, compte tenu de S5 et S2, l'assertion.

$$\underline{T2: (x \leftrightarrow y) \rightarrow (y \rightarrow x)}.$$

Même démonstration par S7, S5 et S3.

$$\underline{T3: (x \rightarrow (y \rightarrow z)) \leftrightarrow (y \rightarrow (x \rightarrow z))}$$

$$(1) \text{ par S7: } (x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z)$$

$$(2) \text{ Par S7: } (y \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow z)) \rightarrow (((y \rightarrow z) \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z)) \rightarrow \rightarrow (y \rightarrow (x \rightarrow z))$$

Par MP sur (2) compte tenu de S8:

$$(((y \rightarrow z) \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z)) \rightarrow (y \rightarrow (x \rightarrow z))$$

$$\text{Par S7 et (1): } (x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow (y \rightarrow (x \rightarrow z))$$

L'implication réciproque en découle aussitôt, d'où l'assertion par D3.

T4: $y \wedge x \leftrightarrow x \wedge y$

Par S2: $y \wedge x \rightarrow y$

Par S3: $y \wedge x \rightarrow x$

Par SI: $(y \wedge x \rightarrow x) \rightarrow ((y \wedge x \rightarrow y) \rightarrow (y \wedge x \rightarrow x \wedge y))$

Par MP deux fois: $y \wedge x \rightarrow x \wedge y$

Par symétrie: $x \wedge y \rightarrow y \wedge x$

Par MP sur S4 deux fois, on tire T4.

T5: $x \rightarrow x \vee y$

Par S2: $\neg x \wedge \neg y \rightarrow \neg x$

Par S11, D1, D7: $\neg(x \vee y) \rightarrow \neg x$

Par S10 et MP: $x \rightarrow x \vee y$

T6: $y \rightarrow x \vee y$

Même démonstration par S3, S11, D1, D7, S10.

T7: $(\neg \neg x \rightarrow \neg \neg y) \leftrightarrow (x \rightarrow y)$

Par S12 et D11: $(x \rightarrow y) \leftrightarrow (\neg \neg x \rightarrow y)$

Par S12, DI3: $(\neg \neg x \rightarrow y) \rightarrow (\neg \neg x \rightarrow \neg \neg y)$

Par D8, l'assertion

T8: $(\neg x \rightarrow \neg y) \leftrightarrow (y \rightarrow x)$

Par substitution de $\neg x$ à y , et de $\neg y$ à x , dans S10:

$(\neg \neg y \rightarrow \neg \neg x) \rightarrow (\neg x \rightarrow \neg y)$

Par T7 et D10: $(y \rightarrow x) \rightarrow (\neg x \rightarrow \neg y)$

D'où par D3 et S10, l'assertion

T9: $x \vee y \leftrightarrow y \vee x$

Par T4: $\neg x \wedge \neg y \leftrightarrow \neg y \wedge \neg x$

Par S11, D9: $\neg(x \vee y) \rightarrow \neg(y \vee x)$

Par D18, l'assertion

T10: $y \rightarrow (x \rightarrow y)$

Par T6: $y \rightarrow \neg x \vee y$

et $\neg x \vee y \rightarrow (\neg x \vee y) \vee (Nx \wedge Ny)$

Par D7: $y \rightarrow (\neg x \vee y) \vee (Nx \wedge Ny)$

Par S9 et D12: $y \rightarrow (x \rightarrow y)$

T11: $\neg x \rightarrow (x \rightarrow y)$

Par T10: $\neg x \rightarrow (\neg y \rightarrow \neg x)$

Par S10 et D2: $(\neg y \rightarrow \neg x) \rightarrow (x \rightarrow y)$

Par D7, l'assertion

T12: $x \rightarrow x$

Par T10: $x \rightarrow (y \rightarrow x)$

Par D6: $y \rightarrow (x \rightarrow x)$

Par R1: $S_i \rightarrow (x \rightarrow x)$ (où S_i est un axiome)

Par MP: $x \rightarrow x$

T13: $x \leftrightarrow x$ (par T12 et D3)

T14: $x \wedge x \leftrightarrow x$

S1: $(\dot{x} \rightarrow x) \rightarrow ((x \rightarrow x) \rightarrow (x \rightarrow x \wedge x))$

Par MP deux fois: $x \rightarrow x \wedge x$

Par S2: $x \wedge x \rightarrow x$

Par D3: $x \wedge x \leftrightarrow x$

T15: $x \vee x \leftrightarrow x$

Par T14: $\neg x \wedge \neg x \leftrightarrow \neg x$

Par S11 et D8: $\neg (x \vee x) \leftrightarrow \neg x$

Par DI8, l'assertion

T16: $(x \rightarrow y) \rightarrow (x \wedge z \rightarrow y)$

S7: $(x \wedge z \rightarrow x) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \wedge z \rightarrow y))$

S1: $x \wedge z \rightarrow x$

Par MP, l'assertion

T17: $(x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow y \vee z)$

S7: $(x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow y \vee z) \rightarrow (x \rightarrow y \vee z))$

Par D6: $(y \rightarrow y \vee z) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow y \vee z))$

T5: $y \rightarrow y \vee z$

Par MP, l'assertion

T18 — Corollaire de T16 et T17: $(x \rightarrow y) \rightarrow (x \wedge z \rightarrow y \vee z)$

T19: $(x \rightarrow y) \rightarrow (x \wedge z \rightarrow y \wedge z)$

S1: $(x \wedge z \rightarrow y) \rightarrow ((x \wedge z \rightarrow z) \rightarrow (x \wedge z \rightarrow y \wedge z))$

D6: $(x \wedge z \rightarrow z) \rightarrow ((x \wedge z \rightarrow y) \rightarrow (x \wedge z \rightarrow y \wedge z))$

(1) Par MP compte tenu de S3: $(x \wedge z \rightarrow y) \rightarrow (x \wedge z \rightarrow y \wedge z)$

T16: $(x \rightarrow y) \rightarrow (x \wedge z \rightarrow y)$

Par D7 sur (1) et T16: $(x \rightarrow y) \rightarrow (x \wedge z \rightarrow y \wedge z)$

T20: $(x \rightarrow z) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \vee y \rightarrow z))$ (Thèse duale de S1)

Par T8: $(x \rightarrow z) \leftrightarrow (\neg z \rightarrow \neg x)$

et $(y \rightarrow z) \leftrightarrow (\neg z \rightarrow \neg y)$

Par S1: $(\neg z \rightarrow \neg x) \rightarrow ((\neg z \rightarrow \neg y) \rightarrow (\neg z \rightarrow \neg x \wedge \neg y))$

Par D10 et D12, compte tenu de T8, S11, D18 et S12:

$(x \rightarrow z) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \vee y \rightarrow z))$

T21: $(x \rightarrow y) \rightarrow (x \vee z \rightarrow y \vee z)$

Par T20: $(x \rightarrow y \vee z) \rightarrow ((z \rightarrow y \vee z) \rightarrow (x \vee z \rightarrow y \vee z))$

Par D6: $(z \rightarrow y \vee z) \rightarrow ((x \rightarrow y \vee z) \rightarrow (x \vee z \rightarrow y \vee z))$

Par MP, compte tenu de T6: $(x \rightarrow y \vee z) \rightarrow (x \vee z \rightarrow y \vee z)$

Par T17: $(x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow y \vee z)$

Par D7, l'assertion

T22: $(x \rightarrow y) \leftrightarrow (x \leftrightarrow x \wedge y)$

S1: $(x \rightarrow x) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow x \wedge y))$

Par MP, compte tenu de T12: $(x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow x \wedge y)$

S7: $(x \rightarrow x \wedge y) \rightarrow ((x \wedge y \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow y))$

Par MP, compte tenu de S3 et D6: $((x \rightarrow x \wedge y) \rightarrow (x \rightarrow y))$

Par D3: $(x \rightarrow y) \leftrightarrow (x \rightarrow x \wedge y)$

Par S4: $(x \wedge y \rightarrow x) \rightarrow ((x \rightarrow x \wedge y) \rightarrow (x \leftrightarrow x \wedge y))$

Par MP compte tenu de S2: $(x \rightarrow x \wedge y) \rightarrow (x \leftrightarrow x \wedge y)$

Par T1: $(x \leftrightarrow x \wedge y) \rightarrow (x \rightarrow x \wedge y)$

Par D3: $(x \rightarrow x \wedge y) \leftrightarrow (x \leftrightarrow x \wedge y)$

Par D8, l'assertion

T23: $(x \rightarrow y) \leftrightarrow (x \vee y \leftrightarrow y)$

Par T20: $(y \rightarrow y) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (y \vee x \rightarrow y))$

Par MP compte tenu de T12: $(x \rightarrow y) \rightarrow (y \vee x \rightarrow y)$

Par T9, D10, D12: $(x \rightarrow y) \rightarrow (x \vee y \rightarrow y)$

Par S7: $(x \rightarrow x \vee y) \rightarrow ((x \vee y \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow y))$

Par MP, compte tenu de T5: $(x \vee y \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow y)$

Par D3: $(x \rightarrow y) \leftrightarrow (x \vee y \rightarrow y)$ (1)

Par S4: $(x \vee y \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow x \vee y) \rightarrow (x \vee y \leftrightarrow y))$

Par D6: $(y \rightarrow x \vee y) \rightarrow ((x \vee y \rightarrow y) \rightarrow (x \vee y \leftrightarrow y))$

Par MP, compte tenu de T5: $(x \vee y \rightarrow y) \rightarrow (x \vee y \leftrightarrow y)$

Par T1: $(x \vee y \leftrightarrow y) \rightarrow (x \vee y \rightarrow y)$

Par D3: $(x \vee y \rightarrow y) \leftrightarrow (x \vee y \leftrightarrow y)$ (2)

Par (1) et (2), compte tenu de D3, l'assertion

T24: $\neg(x \wedge y) \leftrightarrow \neg x \vee \neg y$

Par S11: $\neg(\neg x \vee \neg y) \leftrightarrow \neg \neg x \wedge \neg \neg y$

Par S12, D23, D8: $\neg(\neg x \vee \neg y) \leftrightarrow x \wedge y$

Par D17, D4, l'assertion

T25: $(x \wedge y) \wedge z \leftrightarrow x \wedge (y \wedge z)$

S2: $(x \wedge y) \wedge z \rightarrow x \wedge y$ et $x \wedge y \rightarrow y$

S3: $(x \wedge y) \wedge z \rightarrow z$ et $x \wedge y \rightarrow x$

Par D7: $(x \wedge y) \wedge z \rightarrow y$

$(x \wedge y) \wedge z \rightarrow x$

Par S1: $((x \wedge y) \wedge z \rightarrow y) \rightarrow (((x \wedge y) \wedge z \rightarrow z) \rightarrow ((x \wedge y) \wedge z \rightarrow y \wedge z))$

Par MP deux fois: $(x \wedge y) \wedge z \rightarrow y \wedge z$

Par S1: $((x \wedge y) \wedge z \rightarrow x) \rightarrow (((x \wedge y) \wedge z \rightarrow (y \wedge z)) \rightarrow ((x \wedge y) \wedge z \rightarrow x \wedge (y \wedge z)))$

Par MP deux fois: $(x \wedge y) \wedge z \rightarrow x \wedge (y \wedge z)$

L'implication inverse se démontre de la même façon, d'où l'assertion par D3. On supprimera donc les parenthèses.

T26: $(x \vee y) \vee z \leftrightarrow x \vee (y \vee z)$

Par T25: $(\neg x \wedge \neg y) \wedge \neg z \leftrightarrow \neg x \wedge (\neg y \wedge \neg z)$

Par D17: $\neg((\neg x \wedge y) \wedge \neg z \leftrightarrow \neg(\neg x \wedge (\neg y \wedge \neg z)))$

Par T24: $\neg(\neg x \wedge \neg y) \vee \neg \neg z \leftrightarrow \neg \neg x \vee \neg(\neg y \wedge \neg z)$

Par T24: $(\neg \neg x \vee \neg \neg y) \vee \neg \neg z \leftrightarrow \neg \neg x \vee (\neg \neg y \vee \neg \neg z)$

Par S12, D23, D8, l'assertion

On supprimera donc les parenthèses

T27: $x \vee \neg x \vee Nx$ (Principe du quart exclus)

S9: $(x \rightarrow x) \leftrightarrow (\neg x \vee x) \vee (Nx \wedge Nx)$

Par T12 et D5: $(\neg x \vee x) \vee (Nx \wedge Nx)$

Par T14, D22, D5 et T26, l'assertion

T28: $N \neg x \leftrightarrow \neg N \neg Nx$

Par S13: $\neg N \neg x \leftrightarrow N \neg Nx$

D17: $\neg \neg N \neg x \leftrightarrow \neg N \neg Nx$

S12, D8: $N \neg x \leftrightarrow \neg N \neg Nx$

T29: $\neg x \leftrightarrow N \neg N \neg Nx$

Par T28, D40, S14 et D8

T30: $x \leftrightarrow \neg N \neg N \neg Nx$

Par T29, D17, S12, D8

T31: $\neg Nx \leftrightarrow N \neg N \neg x$

Par S13, D40, S14, D8

$$\text{T32: } Nx \leftrightarrow \neg N \neg N \neg x$$

Par T31, D17, S12, D8

$$\text{T33: } x \leftrightarrow N \neg N \neg N \neg x$$

Par T32, D40, S14, D8

$$\text{T34: } \neg N \neg N \neg Nx \leftrightarrow N \neg N \neg N \neg x$$

Par T30, T33, D8

$$\text{T35: } \neg x \rightarrow (x \rightarrow Nx) \quad (\text{Par T11})$$

$$\text{T36: } x \rightarrow (\neg x \rightarrow Nx)$$

Par T11 et D6

NOTA: Dans tout ce qui suit, on utilisera, pour la substitution à une sous-formule P d'une formule P' équivalente à P , le théorème M I (annexe III). L'usage de ce théorème ne sera pas toujours explicité.

$$\text{T37: } x \wedge (x \vee y) \leftrightarrow x$$

1°) $x \wedge (x \vee y) \rightarrow x$ par S2

2°) $x \rightarrow x$ par T12

$x \rightarrow x \vee y$ par T5

Par S1 $(x \rightarrow x) \rightarrow ((x \rightarrow x \vee y) \rightarrow (x \rightarrow x \wedge (x \vee y)))$

D'où par MP deux fois sur S1: $x \rightarrow x \wedge (x \vee y)$

et l'assertion par D3

$$\text{T38: } x \vee (x \wedge y) \leftrightarrow x \text{ se démontre de façon analogue}$$

$$\text{T39: } x \wedge (y \vee z) \leftrightarrow (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

1°) $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \rightarrow x \wedge (y \vee z)$

Par S2: $x \wedge y \rightarrow x$

Par S3: $x \wedge y \rightarrow y$

Par S2: $x \wedge z \rightarrow x$

Par S3: $x \wedge z \rightarrow z$

Par D29: $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \rightarrow y \vee z$

Par T20: $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \rightarrow x$

Par S1 et MP deux fois: $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \rightarrow x \wedge (y \vee z)$

$$2^{\circ} \quad x \wedge (y \vee z) \rightarrow (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

Nous noterons (F) cette implication. Nous nous proposons de démontrer successivement :

$$(1) \quad \neg x \rightarrow (F)$$

$$(2) \quad x \rightarrow (F)$$

$$(3) \quad Nx \rightarrow (F)$$

Il en résultera alors, par D39, l'assertion (F), puis par D3, l'assertion.

A — *Démonstration de (1)*

$$T11: \neg x \rightarrow (x \rightarrow y)$$

$$M1 \text{ et } T22: (x \rightarrow y) \rightarrow (x \leftrightarrow x \wedge y)$$

$$T1, D7: \neg x \rightarrow (x \rightarrow x \wedge y)$$

$$D31: \neg x \rightarrow (x \wedge (y \vee z) \rightarrow x \wedge y)$$

$$D32: \neg x \rightarrow (x \wedge (y \vee z) \rightarrow (x \vee y) \vee (x \wedge z))$$

B — *Démonstration de (2)*

$$T10: x \rightarrow (y \rightarrow x)$$

$$M1 \text{ et } T22: x \rightarrow (y \leftrightarrow x \wedge y)$$

$$T1, D7: x \rightarrow (y \rightarrow x \wedge y)$$

$$D6: y \rightarrow (x \rightarrow x \wedge y)$$

$$D32: y \rightarrow (x \rightarrow (x \wedge y) \vee (x \wedge z))$$

$$D32: y \rightarrow (x \rightarrow (x \wedge y) \vee (x \wedge z))$$

D'autre part, par les mêmes règles :

$$z \rightarrow (x \rightarrow (x \wedge y) \vee (x \wedge z))$$

$$D29, T15: y \vee z \rightarrow (x \rightarrow (x \wedge y) \vee (x \wedge z))$$

$$D6: x \rightarrow (y \vee z \rightarrow (x \wedge y) \vee (x \wedge z))$$

$$D31, \text{ on a (2)}$$

C — *Démonstration de (3)*

Nous démontrerons successivement :

$$(4) \quad y \rightarrow (Nx \rightarrow (F))$$

$$(5) \quad Ny \rightarrow (Nx \rightarrow (F))$$

$$(6) \quad y \rightarrow (Nx \rightarrow (F))$$

ce qui assurera (3) par D39. Pour démontrer (6), usant du même procédé, nous démontrerons successivement:

$$(7) \neg z \rightarrow (\neg y \rightarrow (Nx \rightarrow (F)))$$

$$(8) Nz \rightarrow (\neg y \rightarrow (Nx \rightarrow (F)))$$

$$(9) z \rightarrow (\neg y \rightarrow (Nx \rightarrow (F)))$$

a) **Démonstration de (4)**

De la démonstration de (2), B, nous extrayons: $y \rightarrow (x \rightarrow (x \wedge y) \vee (x \wedge z))$

Par D31: $y \rightarrow (x \wedge (y \vee z) \rightarrow (x \wedge y) \vee (x \wedge z))$

Par D19: $Nx \rightarrow (y \rightarrow (F))$

Par D6: $y \rightarrow (Nx \rightarrow F)$

b) **Démonstration de (5)**

Par S16: $x \rightarrow (y \rightarrow (Nx \rightarrow Ny))$

Par S14: $Nx \rightarrow (Ny \rightarrow (x \rightarrow y))$

Par T22: $Nx \rightarrow (Ny \rightarrow (x \leftrightarrow x \wedge y))$

Par D36: $Nx \rightarrow (Ny \rightarrow (x \rightarrow x \wedge y))$

Par D33, T17, D36: $Nx \rightarrow (Ny \rightarrow (x \wedge (y \vee z) \rightarrow (x \wedge y) \vee (x \wedge z)))$

Par D6, l'assertion (5)

c) **Démonstration de (7)**

Par T11: $\neg z \rightarrow (z \rightarrow (x \wedge y) \vee (x \wedge z))$

Par D19: $\neg y \rightarrow (\neg z \rightarrow (z \rightarrow (x \wedge y) \vee (x \wedge z)))$

De même en permutant y et z, compte tenu de

D6: $\neg y \rightarrow (\neg z \rightarrow (y \rightarrow (x \wedge y) \vee (x \wedge z)))$

Par D14: $z \rightarrow (\neg y \rightarrow (\neg z \rightarrow (x \wedge y) \vee (x \wedge z)))$

et $y \rightarrow (\neg y \rightarrow (\neg z \rightarrow (x \wedge y) \vee (x \wedge z)))$

Par D29, T15: $y \vee z \rightarrow (\neg y \rightarrow (\neg z \rightarrow (x \wedge y) \vee (x \wedge z)))$

Par D25: $x \wedge (y \vee z) \rightarrow (\neg y \rightarrow (\neg z \rightarrow (x \wedge y) \vee (x \wedge z)))$

Soit G la formule précédente.

Par D19, on obtient $Nx \rightarrow G$, puis par D14, l'assertion (7)

d) Démonstration de (8)

Par la démonstration de (5), b), on a obtenu: $Ny \rightarrow (Nx \rightarrow (F))$,

et en permutant y et z : $Nz \rightarrow (Nx \rightarrow (F))$

Par D19: $\neg y \rightarrow (Nz \rightarrow (Nx \rightarrow (F)))$

Par D6, l'assertion (8)

e) Démonstration de (9)

Par T11: $\neg x \rightarrow (x \rightarrow \neg Nx)$

Par D19: $z \rightarrow (\neg x \rightarrow (x \rightarrow \neg Nx))$

et D 6: $\neg x \rightarrow (z \rightarrow (x \rightarrow \neg Nx))$

De même: $\neg z \rightarrow (z \rightarrow \neg Nx)$

$x \rightarrow (\neg z \rightarrow (z \rightarrow \neg Nx))$

$\neg z \rightarrow (z \rightarrow (x \rightarrow \neg Nx))$

D'où par D29 et T15: $\neg x \vee \neg z \rightarrow (z \rightarrow (x \rightarrow \neg Nx))$

et par application de T24, D14, S10, D36: $Nx \rightarrow (z \rightarrow (x \rightarrow x \wedge z))$

Par T17 et D36: $Nx \rightarrow (z \rightarrow (x \rightarrow (x \wedge z) \vee (x \wedge y)))$

Par D33: $Nx \rightarrow (z \rightarrow (x \wedge (y \vee z) \rightarrow (x \wedge z) \vee (x \wedge y)))$

Par D19: $\neg y \rightarrow (Nx \rightarrow (z \rightarrow (F)))$

Par D14, l'assertion (9), ce qui achève la démonstration de T39.

T40: $N(x \wedge y) \leftrightarrow (Nx \wedge (y \vee Ny)) \vee (Ny \wedge (x \vee Nx))$

Par T39 et T37, cette thèse équivaudra à:

$N(x \wedge y) \leftrightarrow (Nx \vee Ny) \wedge (x \vee Nx) \wedge (y \vee Ny)$, ou encore à

$N(x \wedge y) \leftrightarrow (Nx \wedge Ny) \vee (Nx \wedge y) \vee (x \wedge Ny)$

1°) Soit à démontrer l'implication dans le sens direct, que nous noterons $N(x \wedge y) \rightarrow F$.

Il suffira de démontrer:

(1) $\neg x \rightarrow (N(x \wedge y) \rightarrow Nx)$

(2) $Nx \rightarrow (N(x \wedge y) \rightarrow Nx)$

(3) $x \rightarrow (N(x \wedge y) \rightarrow Ny)$

En effet, de (1) et (2), par D29 et T15

On tirera (4) $\neg x \vee Nx \rightarrow (N(x \wedge y) \rightarrow Nx)$

Puis par D32: (5) $\neg x \vee Nx \rightarrow (N(x \wedge y) \rightarrow Nx \vee Ny)$

De (3) on tirera par D32: (6) $x \rightarrow (N(x \wedge y) \rightarrow Nx \vee Ny)$

De (5) et (6) par S29 et T15, on tirera:

$$x \vee \neg x \vee Nx \rightarrow (N(x \wedge y) \rightarrow Nx \vee Ny)$$

Puis (7) $N(x \wedge y) \rightarrow Nx \vee Ny$ par D39

D'autre part, par T10: (8) $x \rightarrow (N(x \wedge y) \rightarrow x)$

De (4) et (8), par D32, D29 et T15, on tirera:

$$\neg x \vee Nx \rightarrow (N(x \wedge y) \rightarrow Nx \vee x)$$

$$x \rightarrow (N(x \wedge y) \rightarrow Nx \vee x)$$

Puis par D29, T15 et D39, $N(x \wedge y) \rightarrow Nx \vee x$

Par symétrie, $N(x \wedge y) \rightarrow Ny \vee y$

De (7) et des deux dernières thèses, on tirera enfin $N(x \wedge y) \rightarrow F$, par S1 appliqué deux fois.

Il suffit donc de démontrer (1), (2), (3).

A) Démonstration de (1).

Nous démontrerons successivement:

$$(9) \neg x \rightarrow (\neg x \rightarrow (N(x \wedge y) \rightarrow Nx))$$

$$(10) Nx \rightarrow (\neg x \rightarrow (N(x \wedge y) \rightarrow Nx))$$

$$(11) x \rightarrow (\neg x \rightarrow (N(x \wedge y) \rightarrow Nx))$$

ce qui assurera (1), compte tenu de D39

a) Démonstration de (9)

$$\neg x \rightarrow (x \rightarrow x \wedge y) \text{ par T11}$$

$$\neg x \rightarrow (x \leftrightarrow x \wedge y) \text{ par T22, T14 et M1}$$

$$\neg x \rightarrow ((x \leftrightarrow x \wedge y) \rightarrow (N(x \wedge y) \leftrightarrow Nx)) \text{ par S6 et D7}$$

$$\text{Enfin, par D38, } \neg x \rightarrow (\neg x \rightarrow (N(x \wedge y) \leftrightarrow Nx))$$

Puis par T1 et D36, l'assertion (9)

b) Démonstration de (10)

$$\text{Par T10: } Nx \rightarrow (N(x \wedge y) \rightarrow Nx)$$

Par T19, D14, l'assertion (10)

c) *Démonstration de (11)*Par T36: $x \rightarrow (\neg x \rightarrow Nx)$

Par D19 et D14, l'assertion (11)

B — *Démonstration de (2)*: il suffit d'appliquer T10C — *Démonstration de (3)*:Par T10: $x \rightarrow (y \rightarrow x)$ Par M1 et T22: $x \rightarrow (y \wedge x \leftrightarrow y)$ Par S6 et D7: $x \rightarrow ((x \wedge y \leftrightarrow y) \rightarrow (N(x \wedge y) \leftrightarrow Ny))$ Par D38: $x \rightarrow (x \rightarrow (N(x \wedge y) \leftrightarrow Ny))$

Par T1 et D36, on tire:

(12) $x \rightarrow (x \rightarrow (N(x \wedge y) \rightarrow Ny))$

Compte tenu de D39, on devra donc encore démontrer, pour tirer (3):

(13) $Nx \rightarrow (x \rightarrow (N(x \wedge y) \rightarrow Ny))$ noté H(14) $\neg x \rightarrow (x \rightarrow (N(x \wedge y) \rightarrow Nx))$

(14) provient directement de T11

Pour démontrer (13), nous démontrerons successivement

(15) $y \rightarrow H$ (16) $\neg y \rightarrow H$ (17) $Ny \rightarrow H$ (compte tenu de D39)a) *Démonstration de (15)*Par S16: $y \rightarrow (x \rightarrow (Nx \rightarrow Ny))$ Par D19: $N(x \wedge y) \rightarrow (y \rightarrow (x \rightarrow (Nx \rightarrow Ny)))$

Par D14, on obtient (15)

b) *Démonstration de (16)*Par (1) nous avons obtenu $\neg x \rightarrow (N(x \wedge y) \rightarrow Nx)$ Par symétrie: $\neg y \rightarrow (N(x \wedge y) \rightarrow Ny)$ Par D19, deux fois: $Nx \rightarrow (x \rightarrow (\neg y \rightarrow (N(x \wedge y) \rightarrow Ny)))$

Par D14, on obtient (16).

c) *Démonstration de (17)*: Par T10, D19 deux fois, D14.

2°) Soit à démontrer maintenant l'implication réciproque

$$(Nx \wedge (y \vee Ny)) \vee (Ny \wedge (x \vee Nx)) \rightarrow N(x \wedge y)$$

Par symétrie, il suffira de démontrer:

$$(17) Nx \wedge (y \vee Ny) \rightarrow N(x \wedge y) \text{ compte tenu de D29 et T15.}$$

Nous nous proposons de démontrer successivement:

$$(18) N(x \wedge y) \rightarrow (Nx \rightarrow N(x \wedge y))$$

$$(19) x \wedge y \rightarrow (Nx \rightarrow N(x \wedge y))$$

$$(20) \neg(x \wedge y) \rightarrow (Nx \wedge (y \vee Ny) \rightarrow N(x \wedge y))$$

En effet, par D31, on tirera alors:

$$N(x \wedge y) \rightarrow (Nx \wedge (y \vee Ny) \rightarrow N(x \wedge y))$$

$$\text{et } x \wedge y \rightarrow (Nx \wedge (y \vee Ny) \rightarrow N(x \wedge y))$$

D'où l'assertion par D39.

A — *Démonstration de (18)*

Cette thèse est conséquence de T10.

B — *Démonstration de (19)*

$$\text{Par S16: } x \rightarrow (x \wedge y \rightarrow (Nx \rightarrow N(x \wedge y)))$$

$$\text{Par S2: } x \wedge y \rightarrow x$$

$$\text{Par D7: } x \wedge y \rightarrow (x \wedge y \rightarrow (Nx \rightarrow N(x \wedge y)))$$

$$\text{Par T11: } \neg(x \wedge y) \rightarrow (x \wedge y \rightarrow (Nx \rightarrow N(x \wedge y)))$$

$$\text{Par T10, T19, D6: } N(x \wedge y) \rightarrow (x \wedge y \rightarrow (Nx \rightarrow N(x \wedge y)))$$

D'où par D39, on tire (19)

C — *Démonstration de (20)*

Pour démontrer (20) nous démontrerons successivement:

$$(21) \neg x \rightarrow (Nx \wedge (y \vee Ny) \rightarrow N(x \wedge y))$$

$$(22) \neg y \rightarrow (Nx \wedge (y \vee Ny) \rightarrow N(x \wedge y))$$

D'où l'on tirera (20) par D29, T15, T24

a) Pour démontrer (21), nous démontrerons successivement:

$$(23) \neg x \rightarrow (\neg x \rightarrow (Nx \rightarrow N(x \wedge y)))$$

$$(24) x \rightarrow (\neg x \rightarrow (Nx \rightarrow N(x \wedge y)))$$

$$(25) Nx \rightarrow (\neg x \rightarrow (y \vee Ny \rightarrow N(x \wedge y)))$$

D'où l'on tirera (20) par D33 et D39.

1) Démonstration de (23)

$$\text{Par S15 et D6: } \neg x \rightarrow (Nx \rightarrow x)$$

$$\text{Par D19: } \neg N(x \wedge y) \rightarrow (\neg x \rightarrow (Nx \rightarrow x)))$$

Par D14, S10, D7, S12, M1, l'assertion

2) (24) est conséquence de T11 et D6

3) Démonstration de (25)

Nous démontrerons

$$(25a): Nx \rightarrow (\neg x \rightarrow (Ny \rightarrow N(x \wedge y)))$$

$$(25b): Nx \rightarrow (\neg x \rightarrow (y \rightarrow N(x \wedge y)))$$

(25 a) est conséquence de S17, D19, D14.

(25 b) par S15, D19, D14: $Nx \rightarrow (\neg x \rightarrow (y \rightarrow x))$

Par M1, T22: $Nx \rightarrow (\neg x \rightarrow (y \leftrightarrow x \wedge y))$

Par T1 et D7: $Nx \rightarrow (\neg x \rightarrow (y \rightarrow x \wedge y))$

Par T11 et D6: $x \wedge y \rightarrow (\neg (x \wedge y) \rightarrow N(x \wedge y))$

D'où par D7 et D14: $\neg (x \wedge y) \rightarrow (Nx \rightarrow (\neg x \rightarrow (y \rightarrow N(x \wedge y))))$

Comme par (19), D19 et D14:

$$(x \wedge y) \rightarrow (Nx \rightarrow (\neg x \rightarrow (y \rightarrow N(x \wedge y))))$$

et par: T10, D19 et D14:

$$N(x \wedge y) \rightarrow (Nx \rightarrow (\neg x \rightarrow (y \rightarrow N(x \wedge y))))$$

On a bien (25 b) par D39.

De (25 a) et (25 b), on tire (25) par D 34.

b) Pour démontrer (22), nous considérerons:

$$(26) \neg y \rightarrow (y \rightarrow N(x \wedge y)) \text{ (conséquence de T11)}$$

$$(27) \neg y \rightarrow (\neg y \rightarrow (Ny \rightarrow N(x \wedge y))) \text{ (conséquence de (23))}$$

$$(28) y \rightarrow (\neg y \rightarrow (Ny \rightarrow N(x \wedge y))) \text{ (conséquence de (24))}$$

$$(29) Ny \rightarrow (\neg y \rightarrow (Nx \rightarrow N(x \wedge y))) \text{ (conséquence de (25a))}$$

De (29) on tire (30): $Ny \rightarrow (\neg y \rightarrow (Nx \wedge (y \vee Ny) \rightarrow N(x \wedge y)))$ par D 33)

De (26), par D19, on tire:

$$(31): \{ \neg y \rightarrow (\neg y \rightarrow (y \rightarrow N(x \wedge y)))$$

$$(32): \{ y \rightarrow (\neg y \rightarrow (y \rightarrow N(x \wedge y)))$$

Par D34 de (27) et (31):

$$(33): \neg y \rightarrow (\neg y \rightarrow (y \vee Ny) \rightarrow N(x \wedge y)))$$

Par D34, de (28) et (32):

$$(34): y \rightarrow (\neg y \rightarrow (y \vee Ny) \rightarrow N(y \wedge y)))$$

De (33) par D33: $\neg y \rightarrow ((\neg y \rightarrow (Nx \wedge (y \vee Ny) \rightarrow N(x \wedge y)))$

De (34): $y \rightarrow (\neg y \rightarrow (Nx \wedge (y \vee Ny) \rightarrow N(x \wedge y)))$

De (30), (33), et (34), on tire (22) par D39, ce qui achève la démonstration de T40.

$$\text{T41: } N(x \vee y) \leftrightarrow (Ny \wedge (Nx \vee \neg x)) \vee (Nx \wedge (Ny \vee \neg y))$$

$$\leftrightarrow (Ny \vee Nx) \wedge (Ny \vee \neg y) \wedge (Nx \vee \neg x)$$

La démonstration est analogue à la précédente.

Les procédés démonstratifs ayant déjà été largement détaillés, on se contente ci-après d'indiquer les thèses à démontrer, et les étapes de celles des démonstrations qui ne sont pas immédiates.

Nous aurons à démontrer:

$$(A) N(x \vee y) \rightarrow (Nx \vee Ny) \vee (\neg x \vee Nx) \wedge (\neg y \vee Ny)$$

$$(B) Ny \wedge (Nx \vee \neg x) \rightarrow N(x \vee y)$$

Pour démontrer (A), nous devons démontrer:

$$(1) x \rightarrow (N(x \vee y) \rightarrow Nx)$$

$$(2) Nx \rightarrow (N(x \vee y) \rightarrow Nx)$$

$$(3) \neg x \rightarrow (N(x \vee y) \rightarrow \neg x)$$

$$(4) \neg y \rightarrow (N(x \vee y) \rightarrow Nx \vee Ny)$$

(On groupera (1), (2), (3), d'une part, et (1), (2), (4) d'autre part)

Pour démontrer (4), nous devons démontrer:

$$(5) Ny \rightarrow (\neg x \rightarrow (N(x \vee y) \rightarrow Ny))$$

$$(6) y \rightarrow (\neg x \rightarrow (N(x \vee y) \rightarrow Ny))$$

$$(7) y \rightarrow (\neg y \rightarrow (\neg x \rightarrow (N(x \vee y) \rightarrow Nx)))$$

$$(8) \neg y \rightarrow (\neg y \rightarrow (\neg x \rightarrow (N(x \vee y) \rightarrow Nx)))$$

$$(9) Ny \rightarrow (\neg y \rightarrow (\neg x \rightarrow (N(x \vee y) \rightarrow Ny)))$$

Pour démontrer (B), nous devons démontrer:

$$(10) N(x \vee y) \rightarrow (Ny \wedge (Nx \vee \neg x) \rightarrow N(x \vee y))$$

$$(11) x \vee y \rightarrow (Ny \wedge (Nx \vee \neg x) \rightarrow N(x \vee y))$$

$$(12) \neg(x \vee y) \rightarrow (Ny \rightarrow N(x \vee y))$$

Pour démontrer (11), nous devons démontrer:

$$(13) y \rightarrow (Ny \rightarrow N(x \vee y))$$

$$(14) x \rightarrow (Nx \rightarrow N(x \vee y))$$

$$(15) x \rightarrow (\neg x \rightarrow N(x \vee y))$$

Pour démontrer (13) nous devons démontrer: (même démonstration pour (14))

$$(16) x \rightarrow (y \rightarrow (Ny \rightarrow N(x \vee y)))$$

$$(17) Nx \rightarrow (y \rightarrow (Ny \rightarrow N(x \vee y))) \text{ (conséquence de S18)}$$

$$(18) x \rightarrow (\neg x \rightarrow (y \rightarrow (Ny \rightarrow N(x \vee y))))$$

$$(19) Nx \rightarrow (\neg x \rightarrow (y \rightarrow (Ny \rightarrow N(x \vee y)))) \text{ (conséquence de S18)}$$

$$(20) \neg x \rightarrow (\neg x \rightarrow (y \rightarrow (Ny \rightarrow N(x \vee y)))) \text{ (voir démonstration de (8))}$$

— Démonstration de (1)

$$x \rightarrow (y \rightarrow x)$$

$$x \rightarrow (x \vee y \leftrightarrow x)$$

$$x \rightarrow ((x \vee y \leftrightarrow x) \rightarrow (N(x \vee y) \leftrightarrow Nx))$$

$$x \rightarrow (x \rightarrow (N(x \vee y) \leftrightarrow Nx))$$

$$x \rightarrow (x \rightarrow (N(x \vee y) \rightarrow Nx)) \quad \text{D'autre part:}$$

$$\neg x \rightarrow (x \rightarrow (N(x \vee y) \rightarrow Nx))$$

$$Nx \rightarrow (x \rightarrow (N(x \vee y) \rightarrow Nx))$$

D'où l'assertion.

— Démonstration de (8)

$$\neg y \rightarrow (y \rightarrow x)$$

$$\neg y \rightarrow (x \vee y \leftrightarrow x)$$

$$\neg y \rightarrow ((x \vee y \rightarrow x) \rightarrow (N(x \vee y) \leftrightarrow Nx))$$

$$\neg y \rightarrow (\neg y \rightarrow (N(x \vee y) \leftrightarrow Nx))$$

$$\neg x \rightarrow (\neg y \rightarrow (\neg y \rightarrow (N(x \vee y) \leftrightarrow Nx)))$$

$$\neg x \rightarrow (\neg y \rightarrow (\neg y \rightarrow (N(x \vee y) \rightarrow Nx))) \quad \text{D'où l'assertion}$$

— *Démonstration de (16)*

$$\text{Par S16: } y \rightarrow (x \vee y \rightarrow (Ny \rightarrow N(x \vee y)))$$

$$x \vee y \rightarrow (y \rightarrow (Ny \rightarrow N(x \vee y)))$$

De $x \rightarrow x \vee y$, on tire l'assertion

— *Démonstration de (12)*

$$\text{On a: } x \rightarrow (\neg x \rightarrow (Ny \rightarrow N(x \vee y)))$$

$$\text{Par S18: } Nx \rightarrow (\neg x \rightarrow (Ny \rightarrow N(x \vee y)))$$

$$\text{Par la démonstration de (8): } \neg x \rightarrow (\neg x \rightarrow (Ny \rightarrow N(x \vee y)))$$

$$\text{D'où: } \neg x \rightarrow (Ny \rightarrow N(x \vee y))$$

$$\text{et } \neg x \wedge \neg y \rightarrow (Ny \rightarrow N(x \vee y))$$

D'où l'assertion.

$$\text{T42: } N(x \wedge y \wedge z) \leftrightarrow (Nx \vee Ny \vee Nz) \wedge (x \vee Nx) \wedge (y \vee Ny) \wedge (z \vee Nz)$$

s'obtient à partir de T40 par un calcul de routine, compte tenu de T39, T37, T38. De même:

$$\text{T43: } N(x \wedge y \wedge z \wedge t) \leftrightarrow (Nx \vee Ny \vee Nz \vee Nt) \wedge (x \vee Nx) \wedge (y \vee Ny) \wedge (z \vee Nz) \wedge (t \vee Nt)$$

La formule s'étend à l'ordre n par une récurrence simple.

$$\text{T44: } N(x \vee y \vee z) \leftrightarrow (Nx \vee Ny \vee Nz) \wedge (Nx \vee \neg x) \wedge (Ny \vee \neg y) \wedge (Nz \vee \neg z)$$

s'obtient à partir de T41, T39, T37, T38. De même:

$$\text{T45: } N(x \vee y \vee z \vee t) \leftrightarrow (Nx \vee Ny \vee Nz \vee Nt) \wedge (Nx \vee \neg x) \wedge (Ny \vee \neg y) \wedge (Nz \vee \neg z) \wedge (Nt \vee \neg t)$$

La formule s'étend à l'ordre n par une récurrence immédiate.

$$\text{T46: } \neg x \vee Nx \vee \neg N \neg x$$

$$\text{Par L7: } x \vee \neg x \leftrightarrow \neg x \vee \neg N \neg x$$

$$\text{Par D22: } x \vee \neg x \vee Nx \leftrightarrow \neg x \vee Nx \vee \neg N \neg x$$

Par T27 et D5, l'assertion.

T47: $x \vee \neg Nx \vee N \neg x$

Par L9: $\neg Nx \vee N \neg x \leftrightarrow Nx \vee \neg Nx$

D'où par D22: $x \vee \neg Nx \vee N \neg x \leftrightarrow x \vee Nx \vee \neg Nx$
 $\leftrightarrow N(Nx) \vee Nx \vee \neg (Nx)$

Cette dernière expression est une thèse (T27). D'où l'assertion par D5.
 D 1: Définition — On posera: $x + y \leftrightarrow$

$(x \vee Nx \vee y \vee Ny) \wedge (Nx \vee \neg x \vee Ny \vee \neg y) \wedge (x \vee N \neg x \vee y \vee \neg y) \wedge$
 $(x \vee \neg x \vee y \vee N \neg y) \wedge$
 $(\neg x \vee N \neg x \vee \neg Ny \vee \neg N \neg y) \wedge (\neg Nx \vee \neg N \neg x \vee \neg y \vee N \neg y)$

T48: $x + y \leftrightarrow y + x$

Cela résulte de T4 et T9.

T49: $Ncx + y \leftrightarrow Nx + Ny$

Par un calcul de routine (assez pénible!) et compte tenu des lemmes de calcul 1 à 22, on trouvera en effet:

$N(x + y) \leftrightarrow (x \vee Nx \vee y \vee Ny) \wedge (x \vee \neg Nx \vee y \vee \neg Ny) \wedge (Nx \vee N \neg Nx \vee$
 $\vee Ny \vee \neg Ny) \wedge$
 $\wedge (Nx \vee \neg Nx \vee Ny \vee N \neg Ny) \wedge (\neg Nx \vee N \neg Nx \vee \neg y \vee N \neg y) \wedge$
 $\wedge (\neg x \vee N \neg x \vee \neg Ny \vee N \neg Ny)$

On pourra, compte tenu des lemmes L10 et L12, remplacer l'expression ci-dessus par:

$(x \vee Nx \vee y \vee Ny) \wedge (x \vee \neg x \vee y \vee \neg y) \wedge (x \vee N \neg x \vee \neg y \vee Ny) \wedge$
 $\wedge (\neg x \vee Nx \vee y \vee N \neg y) \wedge$
 $\wedge (\neg Nx) \vee N \neg Nx \vee \neg y \vee N \neg y) \wedge (\neg x \vee N \neg x \vee \neg Ny \vee N \neg Ny)$

T50: $(x + y) + z \leftrightarrow x + (y + z)$

Un calcul de routine (effroyable!) donnera pour le premier membre une expression „invariante“ par permutation circulaire des trois variables, compte tenu de T4 et T9, des lemmes 1 à 22, et des théorèmes M2 à M4.

T48 entraîne alors l'assertion.

T51: $\neg (x + Nx)$

Formons $x + Nx$:

$x + Nx \leftrightarrow (x \vee Nx) \wedge (Nx \vee \neg x \vee x \vee \neg Nx) \wedge (x \vee N \neg x \vee Nx \vee \neg Nx) \wedge$
 $\wedge (x \vee \neg x \vee Nx \vee N \neg Nx) \wedge$

$$\begin{aligned} & \vee (\neg x \vee N \neg x \vee \neg x \vee N \neg x) \wedge (\neg Nx \vee \neg N \neg x \vee \neg Nx \vee N \neg Nx) \leftrightarrow \\ & (x \vee Nx) \wedge (\neg x \vee N \neg x) \wedge \\ & \wedge (\neg Nx \vee \neg N \neg x) \text{ compte tenu de T27, T47, M3} \end{aligned}$$

Un calcul de routine montre que: $\neg(x + Nx)$ est une thèse, compte tenu de L7, L21, T27, T47.

$$\text{T52: } x + x \leftrightarrow Nx$$

Calcul de routine, compte tenu de L2.

D 2: Définition — On posera: $x \times y \leftrightarrow (x \wedge y) \vee (Nx \wedge Ny)$
(On remarquera que: $x \times y \leftrightarrow Nx \times Ny$)

$$\text{T53: } x \times y \leftrightarrow y \times x \text{ (Par T4 et T9)}$$

$$\text{T54 } N(x \times y) \leftrightarrow (x \wedge Ny) \vee (Nx \wedge y) \text{ (Calcul de routine, compte tenu de L1 et L2).}$$

$$\text{T55: } (x \times y) \times z \leftrightarrow x \times (y \times z)$$

Un calcul de routine établit que l'expression de $(x \times y) \times z$ est „invariante“ par permutation circulaire des variables, compte tenu de T54, T4 et T9.

T53 entraîne alors l'assertion.

$$\text{T56: } x \times (y + z) \leftrightarrow x \times y + x \times z$$

Le calcul de routine est toutefois un peu plus délicat que les précédents.

On tiendra compte des lemmes L1, L2, L4, L23, L24, L25 et T54.

$$\text{T57: } x \times x \times x \leftrightarrow x \text{ (Calcul de routine en utilisant L6)}$$

$$\text{T58: } x \vee y + x \wedge y \leftrightarrow x + y$$

$$\text{T59: } (x \wedge y) \times (x \vee y) \leftrightarrow x \times y$$

$$\text{T60: } x \wedge y \leftrightarrow x^2 \times y^2 + N(x \times y) + N(x^2 \times y) + N(x \times y^2)$$

(en notant x^2 le produit $x \times x$)

$$\text{T61: } x \vee y \leftrightarrow x \times y + N(x^2 \times y^2) + x^2 \times y + x \times y^2 + x + y$$

Ces quatre dernières thèses peuvent se vérifier par un calcul de routine.

Les thèses suivantes ne servent qu'à définir l'équivalence $\leftrightarrow$ en fonction de l'implication.

T62: $(x \rightarrow y) \vee (y \rightarrow x)$

Par S9, il suffit de démontrer que

$\neg x \vee y \vee (Nx \wedge Ny) \vee \neg y \vee x \vee (Ny \wedge Nx)$ est une thèse. Or cette expression équivaut à:

$(\neg x \vee x \vee \neg y \vee y \vee Nx) \wedge (\neg x \vee x \vee \neg y \vee y \vee Ny)$ qui est une thèse par T27, M4, M3.

T63: $(x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow x) \rightarrow (x \leftrightarrow y)$

Par S4: $(x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow x) \rightarrow (x \leftrightarrow y))$

Par D6: $(y \rightarrow x) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \leftrightarrow y))$

Par D31: $(x \rightarrow y) \rightarrow ((x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x) \rightarrow (x \leftrightarrow y))$

et $(y \rightarrow x) \rightarrow ((x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x) \rightarrow (x \leftrightarrow y))$

Par D29 et T9: $(x \rightarrow y) \vee (y \rightarrow x) \rightarrow ((x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x) \rightarrow (x \leftrightarrow y))$

Par T63 et MP, l'assertion

T64: $(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x) \leftrightarrow (x \leftrightarrow y)$

Par T63, S5 et D3

Enfin, on démontrera aisément les thèses suivantes, qui peuvent simplifier certains calculs.

T65: $N(x \vee Nx) \leftrightarrow x \wedge Nx$

T66: $N(x \wedge Nx) \leftrightarrow x \vee Nx$

§ 3 — Construction de l'anneau quotient des formules

Nous extrapolons ici la construction classique de la logique à 2 valeurs (Lindenbaum, Mac Kinsey, Tarski, ...)

Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des thèses, et soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des formules x, y , etc... de la logique à trois valeurs. Nous établirons sur $\mathcal{F}$ une relation d'équivalence R définie par:

xRy équivaut à: $x \leftrightarrow y \in \mathcal{T}$

Le caractère de relation d'équivalence pour R est assuré par T13 (réflexivité), D2 (symétrie), D8 (transitivité). Cette relation est compatible avec les opérations $+$ et $\times$ (cela résulte de la définition de celles-ci et du théorème M1). On peut donc transporter ces opérations à l'ensemble $\mathcal{F}/R$.

Compte tenu de ce que $\mathcal{T}$ est une classe d'équivalence (D5, D20), et vu que $\neg \mathcal{T}$ est donc inclus dans une seule classe (D17), $\mathcal{F}/R$ sera un anneau. En notant φ l'application canonique de $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{F}/R$, il est clair en effet que l'élément nul de $\mathcal{F}/R$ sera $\varphi(\neg \mathcal{T})$, compte tenu de M9, que son élément unité sera $\varphi(\mathcal{T})$, compte tenu de M8, que l'opposé d'une classe $\varphi(x)$ sera $\varphi(Nx)$, compte tenu de T51 et S12.

Les thèses 58 et 61 montrent que dans l'anneau $\mathcal{F}/R$, les opérations $\wedge$ et $\vee$ sont les infimum et supremum pour l'ordre pseudo-booleien défini dans [1] (voir § 0 ci-dessus).

$\mathcal{F}/R$ est un effet un anneau où pour tout x , $x^3 = x$ et $3x = 0$ (T51, 52, 57).

L'ordre pseudo-booleien de $\mathcal{F}/R$ se définit alors aisément. En effet, soit $x \in \mathcal{F}$, $y \in \mathcal{F}$

$$\varphi(x) \leq \varphi(y) \text{ équivaut à } \varphi(x) \wedge \varphi(y) = \varphi(x),$$

$$\text{ou } x \wedge y \leftrightarrow x \in \mathcal{T}$$

$$\text{ou } x \rightarrow y \in \mathcal{T}$$

ou encore $\varphi(x) \leftrightarrow \varphi(y) = 1$ dans $\mathcal{F}/R$

§ 4 — Remarque sur les connecteurs $\neg$, N , $\wedge$

Le connecteur $\vee$ peut s'exprimer à l'équivalence près, en fonction des connecteurs $\neg$ et $\wedge$ (par S11 et S12). L'addition $+$ et la multiplication $\times$ de $\mathcal{F}$ peuvent donc, à l'équivalence près, s'exprimer uniquement en fonction de $\neg$, N , $\wedge$. Il en sera de même pour les autres connecteurs (axiome S9 pour $\rightarrow$, et thèse T64 pour $\leftrightarrow$)

Dans $\mathcal{F}/R$, la remarque ci-dessus est valable, en supprimant „à l'équivalence près“.

Reçu le 30 avril 1969

Université de Lyon

Faculté des sciences

Département de mathématiques

ANNEXE I

REGLES DERIVEES

(Les 14 premières règles se démontrent sans faire intervenir d'autres connecteurs que $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$)

D1: $\frac{P \leftrightarrow Q}{P \rightarrow Q}$ par MP sur T1

- D2: $\frac{P \leftrightarrow Q}{Q \rightarrow P}$ par MP sur T2
- D3: $\frac{P \rightarrow Q, Q \rightarrow P}{P \leftrightarrow Q}$ par MP sur S4 (deux fois)
- D4: $\frac{P \leftrightarrow Q}{Q \leftrightarrow P}$ par D1, D2, S4 (l'usage de cette règle ne sera pas explicité)
- D5: $\frac{P, P \leftrightarrow Q}{Q}$ par D1 et MP
- D6: $\frac{P \rightarrow (Q \rightarrow R)}{Q \rightarrow (P \rightarrow R)}$ par T3 et D2
- D7: $\frac{P \rightarrow Q, Q \rightarrow R}{P \rightarrow R}$ par MP deux fois sur S7
- D8: $\frac{P \leftrightarrow Q, Q \leftrightarrow R}{P \leftrightarrow R}$ Par D1, $P \rightarrow Q$ et $Q \rightarrow R$
 Par D7, $P \rightarrow R$
 De même par D2, $R \rightarrow Q$ et $Q \rightarrow P$.
 Par D7, $R \rightarrow P$
 Par D3, $P \rightarrow R$
- D9: $\frac{P \leftrightarrow Q, P \leftrightarrow P', Q \leftrightarrow Q'}{P' \leftrightarrow Q'}$ On applique deux fois D8, compte tenu de D4.
- D10: $\frac{P \leftrightarrow P', P \rightarrow Q}{P' \rightarrow Q}$ Par D2 et D7.
- D11: $\frac{P \leftrightarrow P'}{(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (P' \rightarrow Q)}$ Par D1: $P \rightarrow P'$
 Par D2: $P' \rightarrow P$
 Par S7: $(P \rightarrow P') \rightarrow ((P' \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow Q))$
 Par S7: $(P' \rightarrow P) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P' \rightarrow Q))$
 Par MP sur les deux dernières lignes et D3,
 on obtient l'assertion.
- D12: $\frac{P \leftrightarrow P', Q \rightarrow P}{Q \rightarrow P'}$ Par D1 et D7
- D13: $\frac{P \leftrightarrow P'}{(Q \rightarrow P) \leftrightarrow (Q \rightarrow P')}$ Par D1: $P \rightarrow P'$
 Par D2: $P' \rightarrow P$

Par S7: $(Q \rightarrow P) \rightarrow ((P \leftrightarrow P') \rightarrow (Q \rightarrow P'))$

et $(Q \rightarrow P') \rightarrow ((P' \rightarrow P) \rightarrow (Q \rightarrow P))$

Par D6: $(F \rightarrow P') \rightarrow ((Q \rightarrow P) \rightarrow (Q \rightarrow P'))$

et $(P' \rightarrow P) \rightarrow ((Q \rightarrow P') \rightarrow (Q \rightarrow P))$

Par MP: $(Q \rightarrow P) \rightarrow (Q \rightarrow P')$

et: $(Q \rightarrow P') \rightarrow (Q \rightarrow P)$

Par D3, l'assertion.

$$D14: \frac{(P_1 \rightarrow (P_2 \rightarrow (\dots \rightarrow (P_n \rightarrow Q) \dots)))}{(\dots (P_{\sigma(1)} \rightarrow (P_{\sigma(2)} \rightarrow (\dots \rightarrow (P_{\sigma(n)} \rightarrow Q) \dots)))}$$

(où σ est une permutation de $(1, \dots, n)$) se démontre par D6 et par applications successives de T3 et D13.

$$D15: \frac{P \rightarrow Q}{\neg Q \rightarrow \neg P}$$

Par T8, D2 et MP

$$D16: \frac{\neg Q \rightarrow \neg P}{P \rightarrow Q}$$

Par S10 et MP

$$D17: \frac{P \leftrightarrow Q}{\neg P \leftrightarrow \neg Q}$$

Par T8, D4 et D5

$$D18: \frac{\neg P \leftrightarrow \neg Q}{P \leftrightarrow Q}$$

Par T8, et D5.

$$D19: \frac{P}{Q \rightarrow P}$$

Par T10, $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$

Par MP, $Q \rightarrow P$

$$D20: \frac{P, Q}{P \leftrightarrow Q}$$

Par D19 deux fois, et D3

$$D21: \frac{P \leftrightarrow P'}{P \wedge Q \leftrightarrow P' \wedge Q}$$

Par D1: $P \rightarrow P$

Par D2: $P' \rightarrow P$

Par MP sur T19: $P \wedge Q \rightarrow P' \wedge Q$
et: $P' \wedge Q \rightarrow P \wedge Q$

Par D3, l'assertion

$$D22: \frac{P \leftrightarrow P'}{P \vee Q \leftrightarrow P' \vee Q}$$

Par D1: $P \rightarrow P'$

Par D2: $P' \rightarrow P$

Par MP sur T21: $P \vee Q \rightarrow P' \vee Q$
: $P' \vee Q \rightarrow P \vee Q$

Par D3, l'assertion

$$D23: \frac{P \leftrightarrow P', Q \leftrightarrow Q'}{P \wedge Q \leftrightarrow P' \wedge Q'}$$

Par D21: $P \wedge Q \leftrightarrow P' \wedge Q$

Par D21, T4, D9: $P' \wedge Q \rightarrow P' \wedge Q'$

Par D8, l'assertion

$$D24: \frac{P \leftrightarrow P', Q \leftrightarrow Q'}{P \vee Q \leftrightarrow P' \vee Q'}$$

(démonstration duale de celle de D23)

$$D25: \frac{P \rightarrow Q}{P \wedge R \rightarrow Q}$$

Par T16

$$D26: \frac{P \rightarrow Q}{P \rightarrow Q \vee R}$$

Par T17

$$D27: \frac{P \rightarrow Q}{P \rightarrow P \wedge Q}$$

Par T22, D5, D1

$$D28: \frac{P \rightarrow Q}{P \vee Q \rightarrow Q}$$

Par 23, D5, D1

$$D29: \frac{P \rightarrow Q, R \rightarrow S}{P \vee R \rightarrow Q \vee S}$$

Par D26: $P \rightarrow Q \vee S$

Par T9, D12, D26: $R \rightarrow Q \vee S$

Par T20, et MP deux fois, l'assertion.

$$D30: \frac{P \rightarrow Q, R \rightarrow S}{P \wedge R \rightarrow Q \wedge S}$$

Par D25: $P \wedge R \rightarrow Q$

Par T4, D10, D25: $P \wedge R \rightarrow S$

Par S1 et MP deux fois, l'assertion.

$$D31: \frac{P \rightarrow (Q \rightarrow R)}{P \rightarrow (Q \wedge S \rightarrow R)}$$

Par T16 et D7.

$$D32: \frac{P \rightarrow (Q \rightarrow R)}{P \rightarrow (Q \rightarrow R \vee S)}$$

Par T17 et D7

$$D33: \frac{P \rightarrow (Q \rightarrow (R \rightarrow S))}{P \rightarrow (Q \rightarrow (R \wedge T \rightarrow S))}$$

Par D14: $R \rightarrow (Q \rightarrow (P \rightarrow S))$

Par D25: $R \wedge T \rightarrow (Q \rightarrow (P \rightarrow S))$

Par D14, l'assertion

$$D34: \frac{P \rightarrow (Q \rightarrow (R \rightarrow T)), P \rightarrow (Q \rightarrow (S \rightarrow T))}{P \rightarrow (Q \rightarrow (R \vee S \rightarrow T))}$$

Par D14: $R \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow T))$

et $S \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow T))$

Par T20 et MP deux fois:

$R \vee S \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow T))$

Par D14, l'assertion.

$$D35: \frac{P \rightarrow (Q \rightarrow R)}{\neg R \rightarrow (Q \rightarrow \neg P)}$$

$$\text{Par S10: } P \rightarrow (\neg R \rightarrow \neg Q)$$

$$\text{Par D6: } \neg R \rightarrow (P \rightarrow \neg Q)$$

$$\text{Par S10: } (\neg \neg P \rightarrow \neg Q) \rightarrow (Q \rightarrow \neg P)$$

$$\text{Par S12, D11, D10: } (P \rightarrow \neg Q) \rightarrow (Q \rightarrow \neg P)$$

$$\text{Par D7: } \neg R \rightarrow (Q \rightarrow \neg P)$$

$$D36: \frac{P \rightarrow (Q \rightarrow R), R \rightarrow S}{P \rightarrow (Q \rightarrow S)}$$

$$\text{Par D35: } \neg R \rightarrow (Q \rightarrow \neg P)$$

$$\text{Par T8, D4, D5: } \neg S \rightarrow \neg R$$

$$\text{Par D7: } \neg S \rightarrow (Q \rightarrow \neg P)$$

$$\text{Par D35: } \neg \neg P \rightarrow (Q \rightarrow \neg \neg S)$$

$$\text{Par S12, D10, D12, l'assertion.}$$

$$D37: \frac{P \rightarrow (Q \rightarrow (R \rightarrow S)), S \rightarrow T}{P \rightarrow (Q \rightarrow (R \rightarrow T))}$$

Par le même procédé démonstratif que D36, compte tenu de D6.

$$D38: \frac{P \rightarrow (Q \rightarrow R), P \rightarrow Q}{P \rightarrow (P \rightarrow R)}$$

$$\text{Par D6: } Q \rightarrow (P \rightarrow R)$$

$$\text{Par D7, l'assertion.}$$

$$D39: \frac{P \rightarrow Q, \neg P \rightarrow Q, NP \rightarrow Q}{Q}$$

$$\text{Par T20 deux fois et T26:}$$

$$P \vee \neg P \vee NP \rightarrow Q$$

$$\text{Par T27 et MP, on a: } Q$$

$$D40: \frac{P \leftrightarrow O}{NP \leftrightarrow NQ}$$

$$\text{Par S6, et MP deux fois.}$$

ANNEXE II

LEMMES

$$L1: Nx \wedge \neg x \leftrightarrow x \wedge \neg x \wedge Nx$$

Il suffit de montrer $\neg x \wedge Nx \rightarrow x$, compte tenu de T22.

Or: $x \rightarrow (\neg x \rightarrow x)$ par T10, d'où par D31 $x \rightarrow (Nx \wedge \neg x \rightarrow x)$

$Nx \rightarrow (\neg x \rightarrow x)$ par S15, d'où par D31 $Nx \rightarrow (Nx \wedge \neg x \rightarrow x)$

$\neg x \rightarrow (Nx \rightarrow x)$ par S15 et D6 d'où par D31 $\neg x \rightarrow (Nx \wedge \neg x \rightarrow x)$

D'où par D39, l'assertion.

$$\underline{\text{L2: } x \wedge \neg x \leftrightarrow x \wedge \neg x \wedge Nx}$$

se démontre de la même façon à partir des thèses et axiomes:

$$x \rightarrow (\neg x \rightarrow x), Nx \rightarrow (\neg x \rightarrow x), \neg x \rightarrow (x \rightarrow x)$$

$$\underline{\text{L3: } x \wedge \neg x \leftrightarrow Nx \wedge \neg x}$$

Corollaire de L1 et L2, par D8.

$$\underline{\text{L4: } x \wedge \neg x \leftrightarrow x \wedge N \neg x}$$

se démontre par substitution de $\neg x$ à x dans L3.

$$\underline{\text{L5: } Nx \wedge \neg Nx \leftrightarrow N \neg Nx \wedge Nx}$$

Par substitution de Nx à x dans L4

$$\underline{\text{L6: } Nx \wedge \neg Nx \leftrightarrow x \wedge \neg Nx}$$

Par substitution de Nx à x dans L3

$$\underline{\text{L7: } x \vee \neg x \leftrightarrow \neg N \neg x \vee \neg x}$$

$$\underline{\text{L8: } x \vee \neg x \leftrightarrow x \vee \neg Nx}$$

$$\underline{\text{L'8: } x \vee \neg x \vee \neg Nx \leftrightarrow x \vee \neg x}$$

$$\underline{\text{L9: } Nx \vee \neg Nx \leftrightarrow N \neg x \vee \neg Nx}$$

$$\underline{\text{L'9: } Nx \vee \neg Nx \vee N \neg x \leftrightarrow Nx \vee \neg Nx}$$

$$\underline{\text{L10: } Nx \vee \neg Nx \leftrightarrow \neg x \vee Nx}$$

$$\underline{\text{L'10: } Nx \vee \neg x \vee \neg Nx \leftrightarrow \neg x \vee Nx}$$

se démontrent immédiatement à partir de L4, L3, L5, T28, L6, D24, T13.

$$\underline{\text{L11: } \neg N \neg x \vee N \neg x \leftrightarrow x \vee N \neg x}$$

(On substitute $\neg x$ à x dans L10.)

$$\underline{\text{L12: } \neg N \neg x \vee N \neg x \rightarrow \neg N \neg x \vee Nx}$$

(On substitute $\neg x$ à x dans L9.)

$$\underline{\text{L13: } x \vee Nx \rightarrow x \vee N \neg x}$$

Par T10: $x \rightarrow (Nx \rightarrow x)$

Par T23, T1, D7: $x \rightarrow (x \vee Nx \rightarrow x)$

Par D32: $x \rightarrow (x \vee Nx \rightarrow x \vee N \neg x)$ (1)

Par T10: $N \neg x \rightarrow (Nx \rightarrow N \neg x)$

Par T21 et D7: $x \rightarrow (x \vee Nx \rightarrow x \vee N \neg x)$ (2)

Par S15 et D6: $\neg x \rightarrow (Nx \rightarrow x)$

Par T23, T1, D7: $\neg x \rightarrow (x \vee Nx \rightarrow x)$

Par D32: $\neg x \rightarrow (x \vee Nx \rightarrow x \vee N \neg x)$ (3)

De (1), (2), (3), on tire l'assertion par D39.

L14: $\neg x \vee N \neg x \rightarrow \neg x \vee Nx$

(On substitue $\neg x$ à x dans L13.)

L'14: Corollaire: $\neg x \vee N \neg x \leftrightarrow \neg x \vee Nx$

L15: $\neg Nx \rightarrow x \vee \neg x$

Conséquence de L8

L16: $x \vee N \neg x \leftrightarrow x \vee N \neg x \vee \neg N \neg x$

L17: $x \vee N \neg x \leftrightarrow x \vee \neg N \neg x \vee Nx$

L18: $x \vee N \neg x \leftrightarrow x \vee N \neg x \vee Nx$

L19: $x \vee N \neg x \leftrightarrow x \vee N \neg x \vee \neg N \neg x \vee Nx$

Conséquences de
L11 et L12

L20: $\neg x \vee N \neg x \rightarrow Nx \vee \neg Nx$

Conséquence de L14 et L10.

L21: $\neg Nx \vee N \neg Nx \rightarrow x \vee \neg x$

(On substitue Nx à x dans L20.)

L22: $x \vee Nx \rightarrow Nx \vee \neg N \neg x$

Conséquence de L13 et L11, L12.

L23: $N \neg x \wedge \neg Nx \leftrightarrow N \neg x \wedge \neg N \neg x$ (dual de L12)

L24: $x \vee \neg Nx \rightarrow x \wedge \neg N \neg x$ (dual de L14)

L25: $\neg N \neg x \vee (\neg Nx \wedge N \neg x) \leftrightarrow \neg N \neg x$

(On prend la négation du premier membre et on applique L12.)

Nous signalons encore les lemmes suivants, de démonstration aisée, et qui peuvent simplifier certains calculs.

$$\underline{\text{L26: } \neg x \vee \neg Nx \rightarrow x \vee \neg x}$$

$$\underline{\text{L27: } \neg x \vee \neg Nx \rightarrow Nx \vee \neg Nx}$$

$$\underline{\text{L28: } \neg x \vee \neg Nx \rightarrow \neg x \vee Nx}$$

ANNEXE III

THEOREMES

M1: Dans une thèse F contenant une sous-formule P, on peut remplacer P par une sous-formule équivalente P' (c'est à dire si $P \leftrightarrow P'$ est une thèse)

Ce théorème se démontre par récurrence sur le nombre de connecteurs de F, autres que ceux figurant dans P compte tenu de D5, D17, D40, D10, D12, D8, D21, D22.

M2: Si T est une thèse, pour toute variable x , $x \vee \neg T \leftrightarrow x$

T étant une thèse, on a par D19: $\neg x \rightarrow T$

D'où par D15: $\neg T \rightarrow x$, et l'assertion par T23.

M3: Si T est une thèse, pour toute variable x , $x \wedge T \leftrightarrow x$

On a par D19: $x \rightarrow T$, et par T22 l'assertion.

M4: Si T est une thèse, $x \vee T$ est une thèse (par T5 et MP)

M5: Si T est une thèse, pour toute variable x , $NT \rightarrow x \vee \neg x$

Par S16: $T \rightarrow (Nx \rightarrow (NT \rightarrow x))$

Par MP: $Nx \rightarrow (NT \rightarrow x)$

Par D33: $Nx \rightarrow (NT \rightarrow x \vee \neg x)$

Par T10, D33: $x \rightarrow (NT \rightarrow x \vee \neg x)$

Par T10, et D33: $x \rightarrow (NT \rightarrow x \vee \neg x)$

Par D39, l'assertion.

M6: Si T est une thèse, $\neg T \leftrightarrow N \neg T$

En effet, par T35: $T \rightarrow (\neg T \rightarrow N \neg T)$

par S15: $T \rightarrow (N \neg T \rightarrow \neg T)$

Par MP et D3, l'assertion.

M7: Si T est une thèse, $T \leftrightarrow \neg N \neg T$ (Corollaire de M6)

M8: Si T est une thèse, pour toute variable x , $x \times T \leftrightarrow x$

En effet, $x \times T \leftrightarrow (x \wedge T) \vee (Nx \wedge NT)$

Or, par M4: $x \wedge T \leftrightarrow x$

D'autre part, par S16, T1, D7, S14: $T \rightarrow (Nx \rightarrow (NT \rightarrow x))$

D'où par MP: $Nx \rightarrow (NT \rightarrow x)$

Par S15: $x \rightarrow (Nx \rightarrow x)$

Par T10: $x \rightarrow (Nx \rightarrow x)$

D'où par D31 et D22: $NT \wedge Nx \rightarrow x$

Par T23: $(NT \wedge Nx) \vee x \leftrightarrow x$

M1 entraîne alors l'assertion.

M9: Soit T une thèse: $x + \neg T \leftrightarrow x$

En effet, $x + \neg T \leftrightarrow (x \vee Nx \vee \neg T \vee N \neg T) \wedge$

$\wedge (Nx \vee \neg x \vee N \neg T \vee T) \wedge$

$\wedge (x \vee N \neg x \vee \neg T \vee T) \wedge$

$\wedge (x \vee \neg x \vee \neg T \vee NT) \wedge$

$\wedge (\neg x \vee N \neg x \vee \neg N \neg T \vee \neg NT) \wedge$

$\wedge (\neg Nx \vee \neg N \neg x \vee T \vee NT)$

Par M3, M4, M7, on peut supprimer les 2ème, 3ème, 5ème, et 6ème lignes de l'expression de $x + T$.

Par M6 et M2, cette expression devient:

$(x \vee Nx) \wedge (x \vee \neg x \vee NT)$

Par M5 et T23, elle devient:

$(x \vee Nx) \wedge (x \vee \neg x)$

ou $[x \wedge (x \vee \neg x)] \vee [Nx \wedge (x \vee \neg x)]$

ou compte tenu de T37 et T39: $x \vee (Nx \wedge x) \vee (Nx \wedge \neg x)$

et compte tenu de L1: $x \vee (Nx \wedge x) \vee (x \wedge Nx \wedge \neg x)$

Ce qui, compte tenu de T38, équivaut à x .

ANNEXE IV

TABLES DE VALEURS DE VERITE DES CONNECTEURS DE BASE

N.B. — 1 est la seule valeur désignée, 0 correspondant au „faux“. Nous ne donnons pas d'interprétation particulière pour la valeur 2.

x	0	2	1
$\neg x$	1	2	0
Nx	0	1	2
$N\neg x$	2	1	0
$\neg Nx$	1	0	2
$\neg N\neg x$	2	0	1

$x \wedge y$	0	2	1
0	0	0	0
2	0	2	2
1	0	2	1

$x \vee y$	0	2	1
0	0	2	1
2	2	2	1
1	1	1	1

$x \rightarrow y$	0	2	1
0	1	1	1
2	2	1	1
1	0	2	1

$x \leftrightarrow y$	0	2	1
0	1	2	0
2	2	1	2
1	0	2	1

Les connecteurs $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ sont donc ceux de Lukasiewicz.

BIBLIOGRAPHIE

1. P. Janin: Préanneaux" Thèse d'Etat. LYON. Mars 1968
2. P. Janin: Compléments sur la réticulation des préanneaux pseudo-booleiens". (A paraître)
3. D. Ponasse: "Logique Mathématique" OCDL. PARIS 1967.

En ce qui concerne la logique trivalente en général, nous renvoyons aux bibliographies établies par :

- M. Carvallo: Logique à trois valeurs, logique à seuils" Gauthier-Villars. PARIS 1968
M. Ghazalé: Les structures de commutations à m valeurs et les calculatrices numériques" Gauthier-Villars PARIS.
Gr. C. Moisil: Bibliografia lucrărilor românești de logică matematică" BUCAREST 1965.
Rosser et Turquette: Many-valued logics" North Holland 1952.

UN MODEL PROBABILISTIC ÎN CINETICA FLUIDELOR DENSE

ANETA MUJA și ANTOANETA DOBRE

Pornind dela unele considerații generale de ordin fizic și chimic, care permit interpretarea particulelor unui fluid dens drept sfere rigide [7], se face un studiu matematic, cu ajutorul terminologiei din teoria probabilităților, a stării dinamice a modelului unui fluid dens ideal.

Admițând că dinamica sistemului este determinată numai de ciocniri între 2 particule se introduce ecuația integro — diferențială pentru funcția de distribuție și se rezolvă. Se fac unele observații privind posibilitatea de extindere a metodei matematice folosite.

1. În mecanica statistică se demonstrează că probabilitatea ca un sistem de particule materiale să se afle în stare de echilibru este mare în raport cu probabilitatea stării de neechilibru. Deoarece, cele mai multe sisteme rămân în stare de echilibru un timp îndelungat, pentru acestea, în mod practic, nu există stările de neechilibru. Când numărul particulelor sau dimensiunile sistemului chimic scad, însă, sub o anumită limită, stările de neechilibru nu mai pot fi neglijate; sistemul care atinge, în mod spontan, starea de neechilibru revine tot spontan în starea de echilibru.

În teoria clasică a mecanismului echilibrului static se admite că starea sistemului este complet determinată dacă se cunoaște funcția de distribuție. În teoria transportului, funcția de distribuție a stării echilibrului nestaționar se determină prin aproximarea forței medii ce acționează asupra unui sistem de molecule obținut printr-un procedeu asemănător celui folosit în teoria mișcării browniene. Procedeu conduce la un sistem de ecuații Fokker — Plank generalizate.

Considerăm drept model al unui fluid dens ideal un sistem format din particule sferice rigide. Pentru a descrie comportarea unei particule aparținând unui astfel de sistem format dintr-un număr foarte mare de particule N , particula se definește — ca și în mecanica clasică — prin coordonatele sale de loc și prin impulsuri. Coordonatele și impulsurile generalizate alcătuiesc, așa cum este bine cunoscut, dimensiunile particulei. Admițând că o particulă are n grade de libertate, rezultă că spațiul fazelor are $2n$ dimensiuni. Un punct dintr-un spațiu al fazelor cu $2nN$ dimensiuni determină la rândul lui, coordonatele generalizate a N particule cu $2n$ dimensiuni fiecare și cu n grade de libertate.

Un sistem format dintr-un număr de particule N poate prezenta o infinitate de „structuri” ale particulelor. Stările cele mai probabile se calculează atît pe baza ecuațiilor fundamentale ale lui Hamilton, cît și pe baza teoremei lui Liouville, care stabilește legătura dintre proprietățile unei particule și spațiul fazelor.

Ne propunem să studiem comportarea în timp a sistemului considerat, în următoarele ipoteze:

i) intervalul de timp τ în care se produce evenimentul dinamic de bază este suficient de mic;

ii) dinamica sistemului este determinată numai prin ciocniri între două particule; ipoteza aceasta, în care se neglijează ciocnirile între un număr de particule mai mare decît doi, corespunde necesității ca particula sferică rigidă să aibă o densitate dată cînd τ este suficient de mic.

2. Fie un sistem format din N particule materiale de masă egală m ale căror poziții în spațiu și impulsuri la momentul t sînt date de $2N$ vectori $X_\alpha(x_{\alpha j}, t)$ $Y_\alpha(y_{\alpha j}, t)$; $\alpha = 1, 2, \dots, N$, $j = 1, 2, 3$.

Introducem notațiile

$$P(x_{1j}, \dots, x_{Nj}, y_{1j}, \dots, y_{Nj}; t) = p(X_1, \dots, X_N, Y_1, \dots, Y_N) = \\ = p(X_\alpha, Y_\alpha; t)$$

probabilitatea ca la momentul t sistemul celor N particule să se afle în starea $\{X_\alpha, Y_\alpha\}$, ($\alpha = 1, 2, \dots, N$), adică particulele materiale să aibă coordonata de loc X_α și impulsul Y_α , ($\alpha = 1, 2, \dots, N$);

$$p(x_{1j}, \dots, x_{nj}, y_{1j}, \dots, y_{nj}; t) = p(X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n) = \\ = p(X_\beta, Y_\beta; t)$$

probabilitatea ca la momentul t subsistemul celor n ($n < N$) particule să se afle în starea $\{X_\beta, Y_\beta\}$, ($\beta = 1, 2, \dots, n$);

$$p(x_{1j}, \dots, x_{N-n,j}, y_{1j}, \dots, y_{N-n,j}; t) = p(X_1, \dots, X_{N-n}, Y_1, \dots, Y_{N-n}) = \\ = p(X_\gamma, Y_\gamma; t)$$

— probabilitatea ca la momentul t subsistemul celor $N - n$ molecule rămase să se afle în starea $\{X_\gamma, Y_\gamma\}$, ($\gamma = 1, 2, \dots, N - n$);

$$p(x_{1j}, \dots, x_{nj}, y_{1j}, \dots, y_{nj}; t | x_{1j}, \dots, x_{N-n,j}, y_{1j}, \dots, y_{N-n,j}; t) = \\ = p(X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n | X_1, \dots, X_{N-n}, Y_1, \dots, Y_{N-n}) = \\ = p(X_\beta, Y_\beta | X_\gamma, Y_\gamma; t)$$

— probabilitatea ca la momentul t cele două subsisteme formate respectiv din n și $N - n$ particule să se afle în stările corespunzătoare

$$\{X_\beta, Y_\beta\}, (\beta = 1, \dots, n) \quad \{X_\gamma, Y_\gamma\}, (\gamma = n + 1, \dots, N).$$

$$\bar{p}(x_{1j}, \dots, x_{nj}; y_{nj}, \dots, y_{nj}; t) = \bar{p}(X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n)$$

probabilitatea ca la momentul t să aibă loc un eveniment dinamic de bază în subsistemul celor $n < N$ particule.

Presupunem că toate funcțiile introduse mai sus sînt continue în raport cu timpul.

Folosind raționamentul cunoscut și ținînd seama de ipotezele (i) și (ii) avem

$$p(x_{1j}, \dots, x_{Nj}, y_{1j}, \dots, y_{Nj}; t + \Delta t) = p(x_{1j}, \dots, x_{Nj}, y_{1j}, \dots, y_{Nj}; t) \cdot \left[1 - \Delta t \cdot \sum_{\alpha=1}^N \left(\frac{1}{m} \cdot Y_{\alpha} \nabla X_{\alpha} + \lambda \nabla Y_{\alpha} \right) \right] + o(\Delta t)$$

Așadar, starea dinamică a sistemului este descrisă de ecuația

$$\frac{\partial}{\partial t} p(X_1, \dots, X_N, Y_1, \dots, Y_N) + \sum_{\alpha=1}^N \left(\frac{1}{m} Y_{\alpha} \nabla X_{\alpha} + \lambda_{\alpha} \nabla Y_{\alpha} \right) p(X_1, \dots, X_N, Y_1, \dots, Y_N) = 0 \quad (2.1)$$

unde λ_{α} este un parametru constant.

Pe de altă parte,

$$P(X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n) = p(x_{1j}, \dots, x_{nj}, y_{1j}, \dots, y_{nj}; t) = \frac{1}{(N-n)!} \int p(X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n | X_1, \dots, X_{N-n}, Y_1, \dots, Y_{N-n}) dX_{N-n} dY_{N-n} \quad (2.2)$$

și

$$\bar{p}(X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n) = \frac{1}{t_0} \int_{t_0}^{t_0} p(x_{1j}, \dots, x_{nj}, y_{1j}, \dots, y_{nj}; t + \tau) d\tau \quad (t_0 = \text{const}) \quad (2.3)$$

Ne propunem să rezolvăm ecuația (2.3) într-un caz simplificat cînd cele două subsisteme de particule conțin respectiv 1 și $N-1$ particule fiecare.

Din relațiile (2.1), (2.2) și (2.3) obținem

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{p}(x_{1j}, y_{1j}; t) + \frac{y_1}{m} \nabla X_1 \bar{p}(x_{1j}, y_{1j}; t) = - \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} \int \lambda_1 \cdot \nabla y_1 p(x_{1j}, x_{2j}, y_{1j}, y_{2j}; t + \tau) dX_2 dY_2 d\tau \quad (2.4)$$

unde λ_1 este un factor datorat interacțiunii dintre particula considerată de noi și una din cele $N-1$ particule rămase.

Dacă la momentul t sistemul se află în spațiul — fază $\{\xi_{\alpha}, \eta_{\alpha}\}$, iar n momentul $(t + \tau)$ în spațiul — fază $\{\xi_{\alpha}^*, \eta_{\alpha}^*\}$, ($\alpha = 1, 2, \dots, N$), avem

$$p(\xi_{\alpha}^*, \eta_{\alpha}^*; t + \tau) = \iint P(\xi_{\alpha}^*, \eta_{\alpha}^* | \xi_{\alpha}, \eta_{\alpha}; \tau) p(\xi_{\alpha}, \eta_{\alpha}; t) d\xi d\eta \quad (2.5)$$

unde $P(\xi_{\alpha}^*, \eta_{\alpha}^* | \xi_{\alpha}, \eta_{\alpha}; \tau)$, ($\alpha = 1, \dots, N$) este probabilitatea condiționată ca sistemul să treacă din spațiul-fază $\{\xi_{\alpha}, \eta_{\alpha}\}$ în $\{\xi_{\alpha}^*, \eta_{\alpha}^*\}$ în intervalul $(t, t + \tau)$.

Substituirea lui (2.5) în (2.1) ne conduce la ecuația.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \tau} P(\xi_{\alpha}^*, \eta_{\alpha}^* | \xi_{\alpha}, \eta_{\alpha}; \tau) + \\ & + \sum_{\alpha=1}^N (Y_{\alpha} \nabla X_{\alpha} + \lambda_{\alpha} \nabla Y_{\alpha}) P(\xi_{\alpha}^*, \eta_{\alpha}^* | \xi_{\alpha}, \eta_{\alpha}; \tau) = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

a cărei soluție generală se determină cu ușurință.

Scriind pentru un subsistem format din n particule o relație analoagă cu (2.5), avem

$$\begin{aligned} p(\xi_{\beta}^*, \eta_{\beta}^*; t + \tau) = \int \dots \int & P(\xi_{\beta}^*, \eta_{\beta}^* | \xi_{\beta}, \eta_{\beta}; \tau) P(\xi_{\beta}, \eta_{\beta}; t) d\xi_{\beta} d\eta_{\beta} \\ & (\beta = 1, 2, \dots, n), \end{aligned} \quad (2.7)$$

unde

$$\begin{aligned} P(\xi_{\beta}^*, \eta_{\beta}^* | \xi_{\beta}, \eta_{\beta}; \tau) = \int \dots \int & P(\xi_{\beta}^*, \eta_{\beta}^*, \xi_{\gamma}^*, \eta_{\gamma}^* | \xi_{\beta}, \eta_{\beta}, \xi_{\gamma}, \eta_{\gamma}; \tau) \cdot \\ & \cdot p(\xi_{\beta}, \eta_{\beta} | \xi_{\gamma}, \eta_{\gamma}; t) d\xi_{\gamma}^* d\eta_{\gamma}^* d\xi_{\gamma} d\eta_{\gamma} \\ & (\beta = 1, \dots, n; \gamma = n + 1, \dots, N) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Pentru $n = 2$ din ecuațiile (2.8) și (2.6) găsim

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \tau} P(\xi_{\beta}^*, \eta_{\beta}^* | \xi_{\beta}, \eta_{\beta}; \tau) + \left[\frac{Y_1}{m} \nabla X_1 + \frac{Y_2}{m} \nabla X_2 + \right. \\ & \left. + a_{12} \nabla Y_1 + a_{21} \nabla Y_2 \right] P(\xi_{\beta}^*, \eta_{\beta}^* | \xi_{\beta}, \eta_{\beta}; \tau) = \\ & = - \sum_{\alpha=3}^N \int \dots \int (a_{1\alpha} \nabla Y_1 + a_{2\alpha} \nabla Y_2) P(\xi_{\beta}^*, \eta_{\beta}^* | \xi_{\beta}, \eta_{\beta}; \tau) \cdot \\ & \cdot p(X'_1, X'_2, Y'_1, Y'_2; t | \xi_{\gamma}, \eta_{\gamma}; t) d\xi_{\alpha} d\eta_{\alpha}^* d\xi_{\alpha}^* d\eta_{\alpha}, \\ & (\beta = 1, 2) \end{aligned} \quad (2.9)$$

unde

$$a_{ij} (i = 1, 2; j = 1, 2, \dots, N)$$

sînt constante corespunzătoare diverselor stări ale sistemului ($a_{1j} = 0; j \geq 3$) iar $p(X'_1, X'_2, Y'_1, Y'_2; t)$ este probabilitatea ca cele două particule să se afle în fazele $\{X'_1, Y'_1\}, \{X'_2, Y'_2\}$ la momentul t .

Dacă acum, în (2.4) luăm factorul $\lambda_1 = f_1 + f_2$, ceea ce este posibil dacă ținem seama de acțiunea a două forțe (de atracție și de respingere) asupra unei particule, observăm că partea dreaptă a acestei relații se poate

descompune într-o sumă de două integrale. Folosind (2.7). al doilea termen al acestei sume devine

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} \int \dots \int f_2 \nabla Y_1 p(X_1, X_2, Y_1, Y_2; t + \tau) dX_2 dY_2 d\tau = \\ & = -\frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} \int \dots \int f_2 \nabla Y_1 P(\xi_\beta^*, \eta_\beta^* | \xi_\beta, \eta_\beta; \tau) \cdot \\ & \cdot p(X_1' X_2' Y_1' Y_2'; t) dX_2 dY_2 d\tau dX_1' dX_2' dY_1' dY_2'. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Se elimină expresia $f_2 \nabla \Delta Y_1 P(\xi_\beta^*, \eta_\beta^* | \xi_\beta, \eta_\beta; t)$ între relațiile (2.9) și (2.10) și apoi se trece la coordonatele cilindrice (q_1, q_2, q_3) corespunzătoare sistemului care are drept origină 0 molecula 1 și ca axă Oq_1 antiparalelă la vectorul impuls inițial.

După efectuarea calculelor (2.10) se scrie

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} \int \dots \int f_2 \nabla Y_1 (X_1, X_2, Y_1, Y_2; t + \tau) dX_2 dY_2 d\tau = \\ & = C \psi(X_1, K) \int [(1 + K \bar{v} \nabla X_1) \bar{p}(X_1, Y_1 - \Delta Y_1; t) \bar{p}(X_1, Y_2 - \Delta Y_2; t) - \\ & - (1 - K \bar{v} \nabla X_1) \bar{p}(X_1, Y_1; t) \bar{p}(X_1, Y_2; t) q_2] dq_2 dq_3 dY_2 \end{aligned} \quad (2.11)$$

unde constantele C, K și funcția ψ se determină din condiții inițiale iar $\bar{v}$ este un vector unitar pe direcția liniei centrelor celor două particule sferice care se ciocnesc.

Să calculăm acum primul termen al sumei din partea dreaptă a ecuației (2.4).

Avem

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} \int \dots \int f_1 \nabla Y_1 p(X_1, X_2, Y_1, Y_2; t + \tau) dX_2 dY_2 d\tau = \\ & = -\frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} \int \dots \int f_1 \nabla Y_1 p(X_1, X_2, Y_1, Y_2, \xi_Y^*, \eta_Y^*; t + \\ & + \tau) dX_2 dY_2 d\xi_Y^* d\eta_Y^* d\tau = \\ & = \frac{\nabla Y_1}{3\theta t_0} \left[\left(\frac{Y_1}{m} - u \right) \bar{p}(X_1, Y_1; t) + \theta \nabla Y_1 \bar{p}(X_1, Y_1; t) \right] \cdot \\ & \cdot \frac{1}{3\theta} \int_0^\tau \iiint f_1 \lambda_1 \cdot \left[X_1 + (\tau + \tau') \frac{\eta_\beta^*}{m} \right] p(X_1, Y_1 | \xi_Y^*, \eta_Y^*) d\xi_Y^* d\eta_Y^* d\tau d\tau' - \\ & - \nabla Y_1 f_1' \bar{p}(X_1, Y_1; t). \end{aligned} \quad (2.12)$$

unde

$$\theta = \text{const.}$$

$$f_1^* = f_1' = f_1''$$

cu f'_1 — forța de atracție medie intermoleculară asupra moleculei 1 în poziția X_1 , și f''_1 — perturbarea datorată abaterii de la valoarea de echilibru a funcției de distribuție

$$p(X_1, X_2, Y_1, Y_2; t)$$

Cunoscînd (2.11) și (2.12) putem scrie, acum ecuația (2.4) pentru funcția de distribuție

$$\bar{p}(X_1, Y_1; t) = \bar{p}(x_{1j}, y_{1j}, t)$$

sub forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \bar{p}(X_1, Y_1; t) + \left(\frac{Y_1}{m} \nabla X_1 + \nabla Y_1 f'_1 \right) \bar{p}(X_1, Y_1; t) = \\ = I_1 + I_2 + \mu h \bar{p}(X_1, Y_1; t), \end{aligned} \quad (2.13)$$

unde

$$\begin{aligned} I_1 &= C \psi(X_1, K) \iint [\bar{p}(X_1, Y_1 - \Delta Y_1; t) \bar{p}(X_1, Y_2 - \Delta Y_2; t) - \\ &\quad - \bar{p}(X_1, Y_1; t) \bar{p}(X_1, Y_2; t)] q_2 dq_2 dq_3 dY_2; \\ I_2 &= C \psi(X_1, K) \iint [\bar{p}(X_1, Y_1 - \Delta y_1; t) K \bar{v} \nabla X_1 \cdot \bar{p}(X_1, Y_2 - \Delta Y_2; t) + \\ &\quad + \bar{p}(X_1, Y_1; t) K \bar{v} \nabla X_1 \bar{p}(X_1, Y_2; t) q_2] dq_2 dq_3 dY_2; \\ \mu &= \frac{1}{30\epsilon_0} \int_0^\tau \iiint f_1 \lambda_1 \cdot \left[X_1 + (\tau + \tau') \frac{\eta_B^*}{m} \right] p(X_1, Y_1 | \xi_r^*, \eta_r^*) \cdot \\ &\quad \cdot d\xi_r^* d\eta_r^* d\tau d\tau' \end{aligned}$$

și

$$h \bar{p}(X_1, Y_1; t) = \nabla Y_1 \left[\left(\frac{Y_1}{m} - u \right) \bar{p}(X_1, Y_1; t) + \theta \nabla Y_1 \bar{p}(X_1, Y_1; t) \right]$$

Ecuația (2.13) se rezolvă folosind metoda Chapman. Dezvoltăm $\bar{p}(X_1, Y_1; t)$ în serie de puteri

$$\bar{p}(X_1, Y_1; t) = \sum_{v=0}^{\infty} q_3^v \bar{p}_v(X_1, Y_1, t) \quad (2.14)$$

și scriem (2.13) sub forma

$$D \bar{p}(X_1, Y_1; t) = \frac{1}{q_3} [I_1 + \mu h \bar{p}(X_1, Y_1; t)] + I_2 \quad (2.15)$$

unde am notat, pentru prescurtare, membrul stîng al ecuației (2.13) cu $D \bar{p}(X_1, Y_1; t)$

Substituind (2.14) în partea dreaptă a ecuației (2.15) și egalând coeficienții termenilor care conțin aceleași puteri ale lui q_3 obținem următoarele ecuații.

$$\begin{aligned} I_1 \bar{p}_0(X_1, Y_1; t) \bar{p}_0(X_2, Y_2; t) + \mu h [\bar{p}_0(X_1, Y_1; t)] &= 0 \\ D \bar{p}_0(X_1, Y_1; t) &= I_1 [\bar{p}_0(X_1, Y_1; t) \bar{p}_1(X_2, Y_2; t)] + \\ &+ I_1 [\bar{p}_1(X_1, Y_1; t), \bar{p}_0(X_2, Y_2; t)] + \\ &+ I_2 [\bar{p}_0(X_1, Y_1; t; \bar{p}_0(X_2, Y_2; t)] + \\ &+ \mu h [\bar{p}_0(X_1, Y_1, t), \bar{p}_0(X_1, Y_1; t)] \end{aligned} \quad (2.17)$$

unde

$$\begin{aligned} h[\bar{p}_0(X_1, Y_1; t)] &= \nabla Y_1 \left[\left(\frac{Y_1}{m} - u^{(1)} \right) \bar{p}_0(X_1, Y_1; t) \right] + \\ &+ \theta_0 \nabla Y_1 \bar{p}_0(X_1, Y_1; t) \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} h[\bar{p}_1(X_1, Y_1; t) \bar{p}_0(X_1, Y_1; t)] &= \\ = \nabla Y_1 \left\{ \left[\frac{Y_1}{m} - u^{(0)} + \theta_0 \nabla Y_1 \right] \bar{p}_1(X_1, Y_1; t) + \right. \\ \left. \nabla Y_1 [\theta_0 \nabla Y_1 - u^{(1)}] \bar{p}_1(X_1, Y_1; t) \right\} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Aici

$$\begin{aligned} u^{(0)} &= \frac{1}{mn^{(0)}} \int Y_1 \bar{p}_0(X_1, Y_1; t) dY_1 \\ n^{(0)} &= \int \bar{p}_0(X_1, Y_1; t) dY_1 \\ \theta_0 &= \frac{1}{3n^{(0)}} \int m \left[\frac{Y_1}{m} - u^{(1)} \right]^2 \bar{p}_0(X_1, Y_1; t) dY_1, \\ u^{(1)} &= \int \left[\frac{Y_1}{m} - u^{(0)} \right] \bar{p}_1(X_1, Y_1; t) dY_1, \\ \theta_1 &= \frac{1}{3n^{(0)}} \left[\int m \left[\frac{Y_1}{m} - u^{(0)} \right]^2 \bar{p}_1(X_1, Y_1; t) dY_1 - n^{(1)} \theta_0 \right], \\ n^{(1)} &= \int \bar{p}_1(X_1, Y_1; t) dY_1 \end{aligned}$$

O soluție a ecuației (2.14) este

$$\bar{p}_0(X_1, Y_1; t) = \frac{n^{(0)}}{2\pi\theta_0 m} e^{-\frac{[Y_1 - mu^{(0)}]^2}{2m\theta_0}} \quad (2.20)$$

Observînd că (2.19) se mai scrie

$$\begin{aligned} h[\bar{p}_1(X_1, Y_1; t) \bar{p}_0(X_1, Y_1; t)] &= \\ = \theta_0 \nabla Y_1 \bar{p}_0(X_1, Y_1; t) \nabla Y_1 \frac{\bar{p}_1(X_1, Y_1; t)}{\bar{p}_0(X_1, Y_1; t)}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

rezolvarea ecuației (2.17) se face substituind funcția

$$h(\bar{p}_1(X_1, Y_1; t) \bar{p}(X_1, Y_1; t)$$

prin expresia sa din (2.21) și scriind

$$\bar{p}_1(X_1, Y_1; t) = \varphi_1 \bar{p}_0(X_1, Y_1; t)$$

Acest procedeu [7] ne conduce la expresia finală pentru funcția de distribuție $\bar{p}_1(X_1, Y_1, t)$ căutată. Avem

$$\begin{aligned} \bar{p}_1(X_1, Y_1; t) &= \left\{ 1 + \sqrt{\frac{2\theta}{m}} \frac{[5s + 2\pi K^2 \psi(K)] m \psi}{16 \omega m \psi(K) + 5\mu s} \left(\frac{5}{2} - \sigma^2 \right) c \sigma \nabla X_1 - \right. \\ &= \left. \frac{[5s + 4\pi K^2 \psi(K)] m}{4\omega m \psi(K) + 5\mu s} \cdot \frac{F(\sigma)}{\nabla X_1 u} \right\} \bar{p}_0(X_1, Y_1; t), \end{aligned} \quad (2.22)$$

unde

$$\sigma = \sqrt{\frac{m}{2\theta}} \left[\frac{Y_1}{m} - u \right]$$

iar s , ω și $F(\sigma)$ se determină din condiții inițiale.

Dând o interpretare fizică diverselor mărimi de care depinde soluția (2.22) este posibilă o analiză riguroasă a stării de neechilibru pentru modelul simplu pe care ni l-am imaginat pentru un fluid dens.

Observăm că separarea particulelor în două subsisteme a făcut posibilă obținerea și rezolvarea unei ecuații integro-diferențiale pentru funcția de distribuție unidimensională $\bar{p}(X_1, Y_1; t)$. Metoda folosită aici poate fi extinsă și pentru funcția de distribuție bidimensională.

Primit la 15 mai 1969

Universitatea București
Facultatea de chimie

BIBLIOGRAFIE

1. Bartholomay A. F.: Stochastic models for chemical reactions, Bull. Math. Biophys, 20, 1958, p. 175
2. Chapman S., Cowling T. G.: The Mathematical Theory of Nonuniform Gases, Cambridge University Press, New York 1953.
3. Firescu D., Negoiu D., Un model stocastic în cinetica reacțiilor chimice, Analele Universității București, Seria Științele Naturii Matematică-Mecanică, 2, 1965
4. Frost A. A., Pearson R. G.: Kinetics and Mechanism, New York Wiley 1956
5. Mihoc Gh., Firescu D.: Statistica matematică, Ed. didactică și pedagogică, București 1966
6. Onicescu O., Calculul probabilităților Ed. Tehnică, București 1956.
7. Rice S. A. Kinetic Theory of Moderately Dense Rigid Sphere Fluids, J. Chem Phys. 32, 584, 160, pp 538-547
8. Tilenschi S.: Chimie coloidală, Ed. Tehnică, București, 1965

ОБ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ КИНЕТИКИ ГУСТЫХ ЖИДКОСТЕЙ

К Р А Т К О Е С О Д Е Р Ж А Н И Е

Учитывая положения физики и химии, позволяющие рассмотреть частицы густой жидкости как негибкие сферы, и положения теории вероятностей, в работе приведено математическое исследование динамического состояния модели идеальной густой жидкости.

При этом введены и решены интегродифференциальные уравнения функции плотности вероятностей в предположение, что динамика такой системы определяется лишь столкновениями между 2 частицами. Указывается также на возможность применения полученной математической модели и в других областях.

UN MODÈLE PROBABILISTIQUE DANS LA CINÉTIQUE DES FLUIDES DENSES

R É S U M É

En partant de quelques considérations générales d'ordre physique et chimique qui permettent l'interprétation des particules d'un fluide dense comme des sphères rigides [7] l'on fait à l'aide de la terminologie de la théorie des probabilités, une étude mathématique, de l'état dynamique du modèle d'un fluide dense idéal.

Admettant que le dynamisme du système est déterminé seulement par des affrontements entre 2 particules, l'on construit l'équation integro-différentielle pour la fonction de distribution, équation qu'on résolve. On fait ensuite quelques observations concernant la possibilité d'extention de la méthode mathématique utilisée.

CURBURILE UNEI SUPRAFEȚE ÎN ANUMITE PUNCTE SINGULARE EXPRIMABILE ÎN DISTRIBUȚII

TR. NOAGHI

1. Introducere.

Considerăm o suprafață (S) descrisă de ecuațiile sub formă parametrică

$$\begin{aligned}x &= x(u, v) \\ y &= y(u, v) \\ z &= z(u, v)\end{aligned}\tag{1.1}$$

unde $(u, v) \in D$, D fiind un domeniu plan.

Este cunoscut faptul [2], [4] că un punct $M(x_0, y_0, z_0) \in (S)$, corespunzător valorilor (u_0, v_0) a celor doi parametri u, v se zice punct regulat dacă sînt îndeplinite următoarele condiții:

- funcțiile x, y, z ca funcții de variabile reale sînt uniforme și continue.
- admit derivate de ordinul întâi continue.
- nu toate derivatele sînt simultan nule.
- stabilesc o corespondență biunivoacă și bicontinuu între punctele $M \in (S)$ și perechile ordonate de numere (u, v) .
- nu toți iacobienii

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} \quad \frac{D(y, z)}{D(u, v)} \quad \frac{D(z, x)}{D(u, v)}$$

se anulează simultan.

Dacă pentru un punct regulat $M \in (S)$ mai avem că sînt îndeplinite condițiile ca cele trei funcții (1.1) să admită și derivate de ordinul al doilea și acestea sînt continue, cum poate fi văzut în [2] și [4], în acest punct pot fi calculate curbura totală și medie K și respectiv H cu ajutorul relațiilor

$$K(M) = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}\tag{1.2.a}$$

$$H(M) = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)}\tag{1.2.b}$$

unde E, F, G , sînt coeficienții primei forme fundamentale, iar L, M, N , coeficienții formei a doua fundamentale, dați de relațiile

$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 \quad (1.3.a)$$

$$F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v \quad (1.3.b)$$

$$G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 \quad (1.3.c)$$

și respectiv

$$L = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \end{vmatrix} \quad (1.4.a)$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \end{vmatrix} \quad (1.4.b)$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \end{vmatrix} \quad (1.4.c)$$

unde Δ este discriminantul primei forme fundamentale și este dat de relația

$$\Delta = EG - F^2 \quad (1.5)$$

Deasemenea cunoscînd cele două curburile de mai sus K și H se pot determina cu ajutorul lor curburile principale k_1, k_2 ca soluții ale sistemului

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 &= 2H \\ k_1 \cdot k_2 &= K \end{aligned} \quad (1.6)$$

Dacă una din condițiile a, b, c, d, e nu sînt satisfăcute de funcțiile (1.1) într-un anumit punct $M \in (S)$ acest punct se numește punct singular.

Este clar faptul că dacă un punct este singular, aceste curburile nu pot fi calculate cu ajutorul formulelor de mai sus.

În cele ce urmează vom încerca a da un procedeu de determinare a acestor curburile, folosind teoria distribuțiilor, pentru anumite tipuri de puncte singulare a unei suprafețe (S).

2. Puncte singulare cu două plane tangente

Fie suprafața (S) descrisă de ecuațiile (1.1) și $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct al acestei suprafețe pentru care sînt îndeplinite condițiile a, d iar condiția $b)$ este înlocuită cu condiția

$b')$ funcțiile (1.1) admit derivate la stînga și la dreapta finite.

Cît privește condițiile de regularitate $c)$ și $e)$ acestea nu mai sînt îndeplinite, deoarece conform condiției $b')$ funcțiile x, y, z nu sînt derivabile și deci nici iacobienii nu există. Deci punctul M_0 este un punct singular.

Este evident faptul că într-un astfel de punct, satisfăcînd aceste condiții este exclusă posibilitatea calculării curburilor totală, medie și principale, cu ajutorul formulelor cunoscute.

Într-un astfel de punct $M_0 \in (S)$ vom considera suprafața formată din ansamblul celor două plane tangente (T_1) și (T_2) pe care o vom nota cu (Σ) și pe care o vom numi „suprafață asociată de tip hiperbolic” a suprafeței date (S) în punctul M_0 . În analogie cu punctele singulare a curbilor plane, în care acestea admit tangentă dublă, studiate în [6] vom da următoarea:

Definiția 2.1. Numim curburi (totală, medie, principale) cilindrice de tip hiperbolic a suprafeței (S) în punctul M_0 în care sînt îndeplinite condițiile $a)$, $b')$, $d)$ curburi (totală, medie, principale) cilindrice de tip hiperbolic ale suprafeței asociate în punctul M_0 .

Observație. Denumirea de curburi cilindrice de tip hiperbolic și suprafață asociată de tip hiperbolic își au justificarea în modul de a fi construite ce se va vedea în cele ce urmează.

3. Puncte neregulate cu un singur plan tangent

Dacă (S) este suprafața descrisă de ecuațiile parametrice (1.1) vom presupune de asemenea că aceste ecuații îndeplinesc condițiile $a)$ și $d)$ iar în locul condiției $b)$ vor satisface condiția

$b'')$ secțiunea normală a suprafeței în acest punct are un punct de întoarcere.

Evident că această condiție $b'')$ implică neîndeplinirea celorlalte condiții de regularitate și deci nici într-un astfel de punct curburi (totală, medie, principale) nu pot fi determinate cu ajutorul formulelor obișnuite.

Ca și în paragraful precedent vom considera și în acest caz „suprafața asociată de tip parabolic” a suprafeței (S) în punctul M_0 — denumire ce va fi justificată mai tîrziu — și pe care o vom nota deasemenea cu (Σ) și care va fi formată din planul tangent (T) ce trece prin tangenta la secțiunea normală și este perpendicular pe planul acesteia.

Și pentru acest tip de puncte singulare vom da

Definiția 3.1. Vom numi curburi (totală, medie, principale) cilindrice de tip parabolic, curburi (totală, medie, principale) cilindrice de tip parabolic ale suprafeței asociate de tip parabolic.

Existența unor astfel de puncte singulare este arătată de următorul exemplu: fie (C) o curbă plană a cărei plan îl vom nota cu (P) , care admite un punct de întoarcere în punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Fie D o dreaptă perpendiculară pe planul (P) în punctul M . Vom mișca prin translație planul (P) , astfel ca M să rămînă pe dreapta D . Atunci curba (C) va da naștere la o suprafață (S) , care conține punctele dreptei D și care vor fi puncte ce au proprietatea cerută.

4. Determinarea curburilor (totală, medie, principale) ale suprafeței asociate de tip hiperbolic

Fie (Σ) suprafața formată din cele două plane tangente (T_1) și (T_2) . Deoarece cum este cunoscut [4] curburile K și H și deci k_1 și k_2 sînt niște invarianți la o schimbare de sistem de referință, putem cu ajutorul a două transformări — o rotație și o translație — face ca dreapta de intersecție a celor două plane

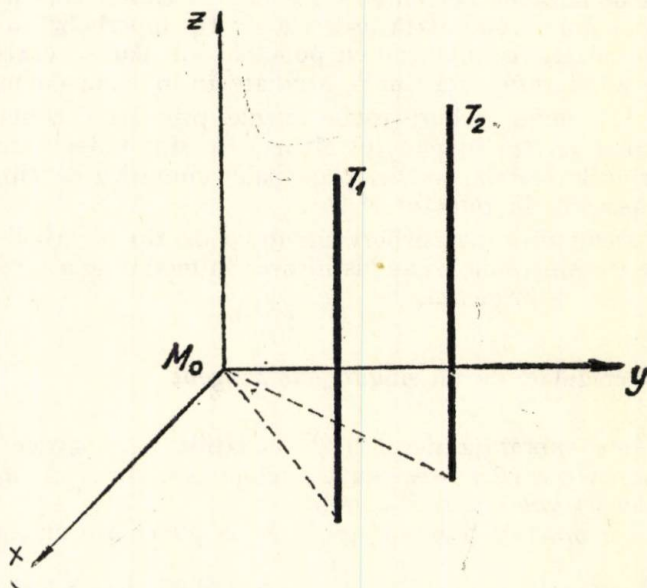


fig. 4.1

tangente (T_1) și (T_2) pe care o vom nota cu (d) să coincidă cu axa Oz , iar punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ cu originea (fig. 4.1).

Este clar că cele două plane tangente au o dreaptă de intersecție, deoarece au punctul comun M_0 .

În această situație, notînd cu (t_1) și (t_2) dreptele de intersecție ale planelor (T_1) respectiv (T_2) cu planul xOy , vom considera o familie de suprafețe cilindrice pe care o vom nota cu $\{C_a\}$ unde $a \in \mathbb{R}$, definită în felul următor: fiecare element al familiei are generatoarea paralelă cu axa Oz și are drept curbă directoare o hiperbolă cu proprietatea că are centrul în origine, este situată în planul xOy și

$$\frac{b}{a} = m \quad (4.1)$$

unde a și b sînt semiaxele hiperbolei, iar $m = \operatorname{tg}(\pi/2 - \theta/2)$ θ fiind unghiul diedru format de cele două plane care determină pe (Σ) .

Pentru simplificarea calculului, fără însă a restrânge generalitatea problemei, putem considera că sistemul de referință este astfel ales încât axa Oy să fie bisectoarea unghiului θ format de cele două drepte (t_1) și (t_2) , așa cum se vede în fig. 4.2.

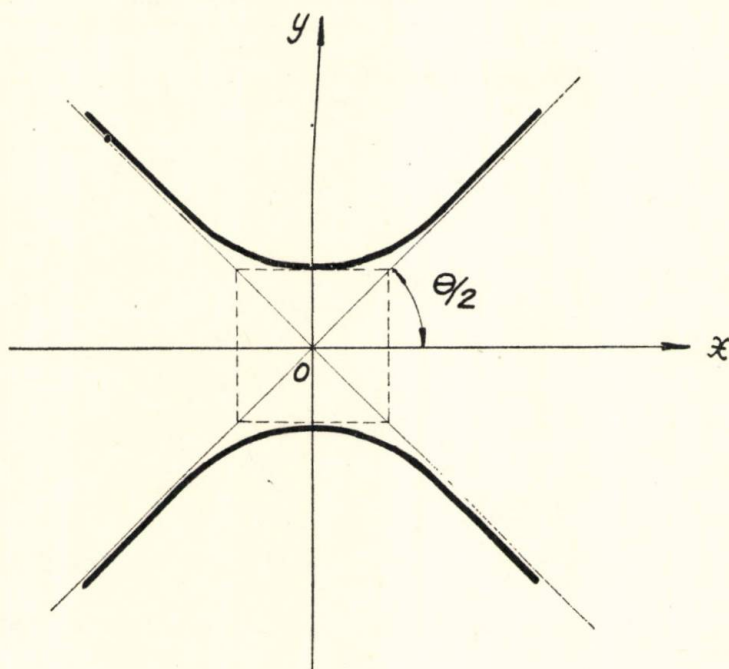


fig. 4.2

Față de sistemul de referință astfel ales ecuațiile familiei de suprafețe cilindrice considerate $\{C_a\}$ sînt:

$$\begin{aligned} x &= u \\ y &= m \sqrt{u^2 + a^2} \\ z &= v \end{aligned} \quad (4.2)$$

unde a este parametrul familiei.

Se observă imediat că făcînd pe $a \rightarrow 0$, ca limită familia de suprafețe cilindrice $\{C_a\}$ va avea chiar suprafața (Σ) . Această observație arată că firească următoarea:

Definiția 4.1. Vom numi curbura (totală, medie, principale) cilindrică a suprafeței (Σ) , limita curburii (totală, medie, principale) a familiei de suprafețe $\{C_a\}$ definită de ecuațiile (4.2), date de egalitățile (1.2.a), (1.2.b) și (1.4).

Această definiție poate fi dată, deoarece suprafețele familiei sînt formate numai din puncte regulate și deci formulele de mai sus au sens.

În vederea determinării expresiilor curburilor: totale, medii și principale a elementelor familiei, calculăm coeficienții primei forme fundamentale, discriminantul acesteia și coeficienții formei a doua fundamentale pentru familia $\{C_a\}$ și vom obține:

$$E = 1 + \frac{m^2 u^2}{u^2 + a^2} \quad (4.3.a)$$

$$F = 0 \quad (4.3.b)$$

$$G = 1 \quad (4.3.c)$$

și

$$\Delta = 1 + \frac{m^2 u^2}{u^2 + a^2} \quad (4.4)$$

precum și

$$L = -\frac{ma^2}{u^2 + a^2} \cdot \left(1 + \frac{m^2 u^2}{u^2 + a^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (4.5.a)$$

$$M = 0 \quad (4.5.b)$$

$$N = 0 \quad (4.5.c)$$

Răspunsul la întrebarea care sînt expresiile celor trei tipuri de curbură este dat de următoarele teoreme:

Teorema 4.1. Punctele singulare ale unei suprafețe asociate (Σ) de tip hiperbolic sînt puncte parabolice.

DEMONSTRAȚIE

Punctele parabolice sînt definite [4] prin proprietatea de a avea $K(M) = 0$. Pentru a dovedi afirmația din teoremă, se folosește proprietatea suprafețelor cilindrice de a fi formate numai din puncte parabolice [4]. Deci oricare ar fi punctul $M \in \mathcal{C}$ arbitrar din $\{\mathcal{C}_a\}$ avem:

$$K(M) = 0.$$

Atunci prin trecerea la limită vom obține valoarea zero și pentru curbura cilindrică de tip parabolic, adică tocmai concluzia teoremei.

Să determinăm în continuare expresia curburii medii. Pentru aceasta vom considera suprafața cilindrică $\mathcal{C}_a$ din familie (indicele a indică că această suprafață corespunde valorii a a parametrului). Atunci în baza egalităților (1.2.b), (4.4), (4.5.a) (4.5.b) și (4.5.c), obținem expresia curburii medii $H_a(u, v)$ pentru suprafața $\mathcal{C}_a$ și anume

$$H_a(u, v) = -\frac{1}{2} \frac{ua^2}{(u^2(1 + m^2) + a^2)^{3/2}} \quad (4.6)$$

Se observă că pentru $u \neq 0$ limita lui $H_a(u, v)$ pentru $a \rightarrow 0$ există și este peste tot egală cu zero, cum este și firesc ținând cont că suprafața limită este descrisă de ecuații liniare. Însă pentru $u = 0$ această limită nu există în sens obișnuit. Din această cauză vom determina limita lui $H_a(u, v)$ în sensul teoriei distribuțiilor.

Așa cum s-a arătat în [6] dacă

$$f_a(u) = \frac{ma^2}{(u^2(1+m^2) + a^2)^{3/2}} \quad (4.7)$$

avem

$$\lim_{a \rightarrow 0} f_a(u) = \frac{2m}{1+m^2} \delta(u) \quad (4.8)$$

unde operatorul de limită este considerat în sensul teoriei distribuțiilor și unde $\delta(u)$ este distribuția lui Dirac.

Ținând cont de egalitatea care leagă funcția H_a de funcția f_a și anume:

$$f_a(u) = -2H_a(u, v) \quad (4.9)$$

obținem:

$$\lim_{a \rightarrow 0} H_a(u, v) = -\frac{m}{1+m^2} \delta(u) \quad (4.10)$$

sau în baza definiției constantei m avem

$$\cos \theta/2 = \frac{m}{1+m^2} \delta(u)$$

și deci relația (4.10) devine:

$$\lim_{a \rightarrow 0} H_a(u, v) = -\cos \theta/2 \delta(u) \quad (4.10')$$

Deoarece curbura medie cilindrică a suprafeței asociate de tip hiperbolic a fost definită ca limită — în sensul teoriei distribuțiilor — a lui $H_a(u, v)$ obținem în final

$$\bar{H} = -\cos \theta/2 \delta(u) \quad (4.11)$$

Folosim notația $\bar{H}$ pentru a deosebi curbura cilindrică de curbura în sens obișnuit. De asemenea menționăm că pe lângă denumirea de curbura cilindrică de tip hiperbolic, vom mai adăuga adjectivul „singulară” sau „neregulată”, deoarece această curbura a fost determinată pentru punctele unei suprafețe în care condițiile de regularitate nu sînt îndeplinite, adică în punctele singulare.

Cu acestea putem enunța

Teorema 4.2. Curbura medie cilindrică singulară (neregulată) de tip hiperbolic, a unei suprafețe asociate de tip hiperbolic, există și este determinată de egalitatea (4.11)

Pentru determinarea curburilor principale cilindrice de tip hiperbolic vom da în prealabil

Definiția 4.2. Vom numi curburi principale neregulate cilindrice de tip hiperbolic soluțiile $\bar{k}_1$ și $\bar{k}_2$ ale sistemului (1.6) în care membri dreپți sînt $\bar{K}$ și $\bar{H}$.

Justificarea acestui mod de a defini curburile principale neregulate cilindrice rezultă din faptul că dacă se consideră un punct al suprafeței (S) în care există curburile totală, medie și principale, acestea verifică sistemul (1.6).

Folosind cele două teoreme de mai sus și definiția curburilor principale cilindrice neregulate de tip hiperbolic k_1 și k_2 vom obține pentru acestea următoarele expresii

$$\bar{k}_1 = 0 \quad (4.12.a)$$

$$\bar{k}_2 = -2 \cos \theta/2 \delta(u) \quad (4.12.b)$$

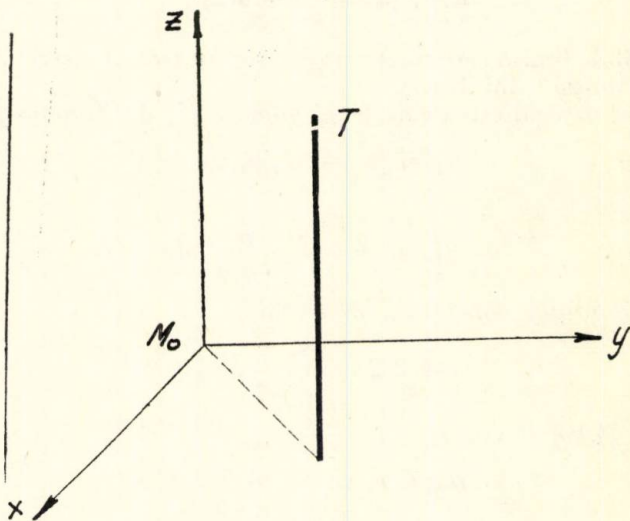


fig. 5.1

5. Determinarea curburilor (totală, medie, principale) ale suprafețelor asociate de tip parabolic

Dacă $M_0(x_0, y_0, z_0) \in (S)$ este un punct al acesteia cu proprietatea că în el putem considera o suprafață asociată de tip parabolic, vom putea face — în baza invarianței celor trei tipuri de curburi — o rotație și o translație, astfel încât în urma acestor transformări de coordonate, originea noului sistem de referință să coincidă cu punctul M_0 , iar tangenta secțiunii normale cu axa Oz . (fig. 5.1).

În baza aceluiași considerente — pentru simplificarea calculelor — putem face o nouă rotație astfel încât axa Oy să coincidă cu dreapta de intersecție (t) a planului (T) cu planul de coordonate xOy .

În mod asemănător cu cele expuse în paragraful precedent, vom considera o familie de suprafețe cilindrice $\{C_p\}$ cu proprietatea că fiecare suprafață a

familiei are generatoarea paralelă cu axa Oz , iar drept curbă directoare câte o parabolă caracterizată de următoarele proprietăți: are vârful în origine, planul său coincide cu xOy iar axa sa de simetrie este chiar axa Oy . Astfel ales sistemul de referință, familia de suprafețe cilindrice considerată $\{C_p\}$ va fi descrisă de sistemul de ecuații parametrice

$$\begin{aligned}x &= u \\y &= 2pu^2 \\z &= v\end{aligned}\tag{5.1}$$

unde p este un parametru real.

Este aproape imediat faptul, așa cum rezultă și din [6] că atunci cînd $p \rightarrow \infty$, această familie de suprafețe cilindrice are ca limită planul (T). Astfel este îndreptățit faptul de a da

Definiția 5.1. Numim curbură (totală, medie, principale) singulară cilindrică de tip parabolic a unei suprafețe asociate de tip parabolic (Σ) limita curburilor (totală, medie, principale) a elementelor familiei $\{C_p\}$. (operatorul de limită fiind considerat în sensul teoriei distribuțiilor, deoarece în sens obișnuit nu există).

Pornind de la această definiție putem enunța o teoremă similară cu teorema 4.1. relativ la suprafețele asociate de tip parabolic.

Teorema 5.1. Punctele singulare ale unei suprafețe asociate de tip parabolic sînt puncte parabolice.

Demonstrarea acestei afirmații se face pe baza aceluiași considerente folosite la demonstrarea teoremei similare din paragraful precedent.

Pentru a determina curbura medie cilindrică singulară pentru acest tip de suprafețe asociate vom determina coeficienții E, F, G și L, M, N a celor două forme fundamentale precum și discriminantul primei forme fundamentale, pentru elementele familiei și vom obține în baza egalităților (1.3.a), (1.3.b), (1.3.c), (1.4), (1.5.a), (1.5.b) și (1.5.c)

$$E = 1 + 16p^2u^2\tag{5.2.a}$$

$$F = 0\tag{5.2.b}$$

$$G = 1\tag{5.2.c}$$

și

$$\Delta = 1 + 16p^2u^2\tag{5.3}$$

precum și

$$L = -\frac{4p}{(1 + 16p^2u^2)^{1/2}}\tag{5.4.a}$$

$$M = 0\tag{5.4.b}$$

$$N = 0\tag{5.4.c}$$

atunci din relația (1.2.b) obținem

$$H_p(u, v) = -\frac{1}{2} \frac{4p}{(1 + 16p^2u^2)^{3/2}}\tag{5.5}$$

Notînd cu

$$f_p(u) = \frac{4p}{(1 + 16p^2u^2)^{3/2}} \quad (5.6)$$

conform celor demonstrate în [6] avem

$$\lim_{p \rightarrow \infty} f_p(u) = 2\delta(u) \quad (5.7)$$

operatorul de trecere la limită fiind considerat în sensul teoriei distribuțiilor.

Din relația ce leagă cele două funcții f_p și H_p adică

$$f_p = -2H_p \quad (5.8)$$

avem

$$\lim_{p \rightarrow \infty} H_p(u, v) = -\delta(u)$$

și conform definiției curburii medii cilindrice singulare de tip parabolic avem:

$$\tilde{H} = -\delta(u) \quad (5.9)$$

deci putem enunța

Teorema 5.2. Curbura medie cilindrică singulară de tip parabolic a unei suprafețe asociată de tip parabolic există și este dată de relația (5.9).

Se observă că suprafețele de tip hiperbolic diferă între ele prin unghiul θ pe care îl fac cele două plane care o compun și deasemenea avem că atunci cînd $\theta \rightarrow 0$, suprafața asociată de tip hiperbolic tinde către o suprafață asociată de tip parabolic.

Comparînd cele două formule (4.11) și (5.9) care ne dau expresiile celor două tipuri de curburii medii neregulate cilindrice, în egalitatea (4.11) considerînd pe θ drept un parametru, pentru care vom folosi în cele ce urmează denumirea de „caracteristica” suprafeței, putem enunța:

Teorema 5.3. Curbura medie neregulată cilindrică de tip parabolic este un caz limită a curburii medii cilindrice neregulate de tip hiperbolic, cînd caracteristica acesteia converge către zero.

Similar cu modul de a defini curburi principale singulare cilindrice din paragraful precedent putem da

Definiția 5.2. Vom numi curburi principale singulare cilindrice de tip parabolic, soluțiile sistemului de ecuații (1.6) în care membrii dreپți sînt $\tilde{K}$ respectiv $\tilde{H}$.

Conform acestei definiții rezolvarea sistemului (1.6) ne conduce la următoarele expresii:

$$\tilde{k}_1 = 0 \quad (5.10.a)$$

$$\tilde{k}_2 = -2\delta(u) \quad (5.10.b)$$

Comparînd aceste formule cu (4.12.a) și (4.12.b) obținem

Teorema 5.4. Curburi principale singulare cilindrice de tip parabolic sînt cazuri limită de curburii principale singulare de tip hiperbolic cînd caracteristica acestora tinde către zero.

Deoarece curburile totale singulare cilindrice de tip hiperbolic cît și cele de tip parabolic sînt nule, conform teoremelor 4.3. și 4.4. obținem

Teorema 5.5. Curburile singulare cilindrice (totală, medie și principale) de tip parabolic sînt cazuri limită de curburi singulare cilindrice (totală, medie și principale) de tip hiperbolic cînd caracteristica acestora tinde către zero.

6. Curburi cilindrice neregulate în puncte regulate

Dacă $M_0 \in (S)$ este un punct regulat atunci conform condițiilor de regularitate *b)* și *e)* în punctul M_0 avem un singur plan tangent. Ducînd în acest plan o dreaptă oarecare (*d*) care să treacă prin M_0 putem considera că avem două plane confundate ce se „intersectează” după dreapta (*d*) și pe care o vom numi suprafață asociată suprafeței (*S*) în punctul M_0 . Considerînd că la aceasta se poate ajunge de la o suprafață asociată de tip hiperbolic făcînd caracteristica acestea să convergă către π . Ținînd cont de faptul că planul este format numai din puncte parabolice și de relațiile (4.11), (4.12.a), (4.12.b) prin trecere la limită pentru $\theta \rightarrow \pi$ se obține:

Teorema 6.1. Curburile singulare cilindrice (totală, medie și principale) sînt nule în orice punct regulat.

Primită la 30 aprilie 1969

Institutul de mine,
Petroșeni

BIBLIOGRAFIE

1. R. Cristescu: Analiză funcțională, Ed. didact. și ped., București, 1965.
2. A. Dobrescu: Geometrie diferențială, Ed. didact. și ped., București, 1963.
3. Guelfand Chilov: Les distributions, I, Dunod, Paris, 1963.
4. E. Murgulescu: Geometrie analitică și diferențială Ed. didact. și ped., București, 1965.
5. M. Nicolescu: Analiză matematică, II, Ed. tehnică, București, 1958.
6. T. Noaghi: Studiul curburii curbelor plane cu ajutorul teoriei distribuțiilor, Anal. Univ. București, ser. șt. nat., mat. — mec., XVII, 1, 1968.

КРИВИЗНЫ ПОВЕРХНОСТЕЙ В НЕКОТОРЫХ ОСОБЫХ ТОЧКАХ, ВЫРАЖЕННЫЕ ЧЕРЕЗ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

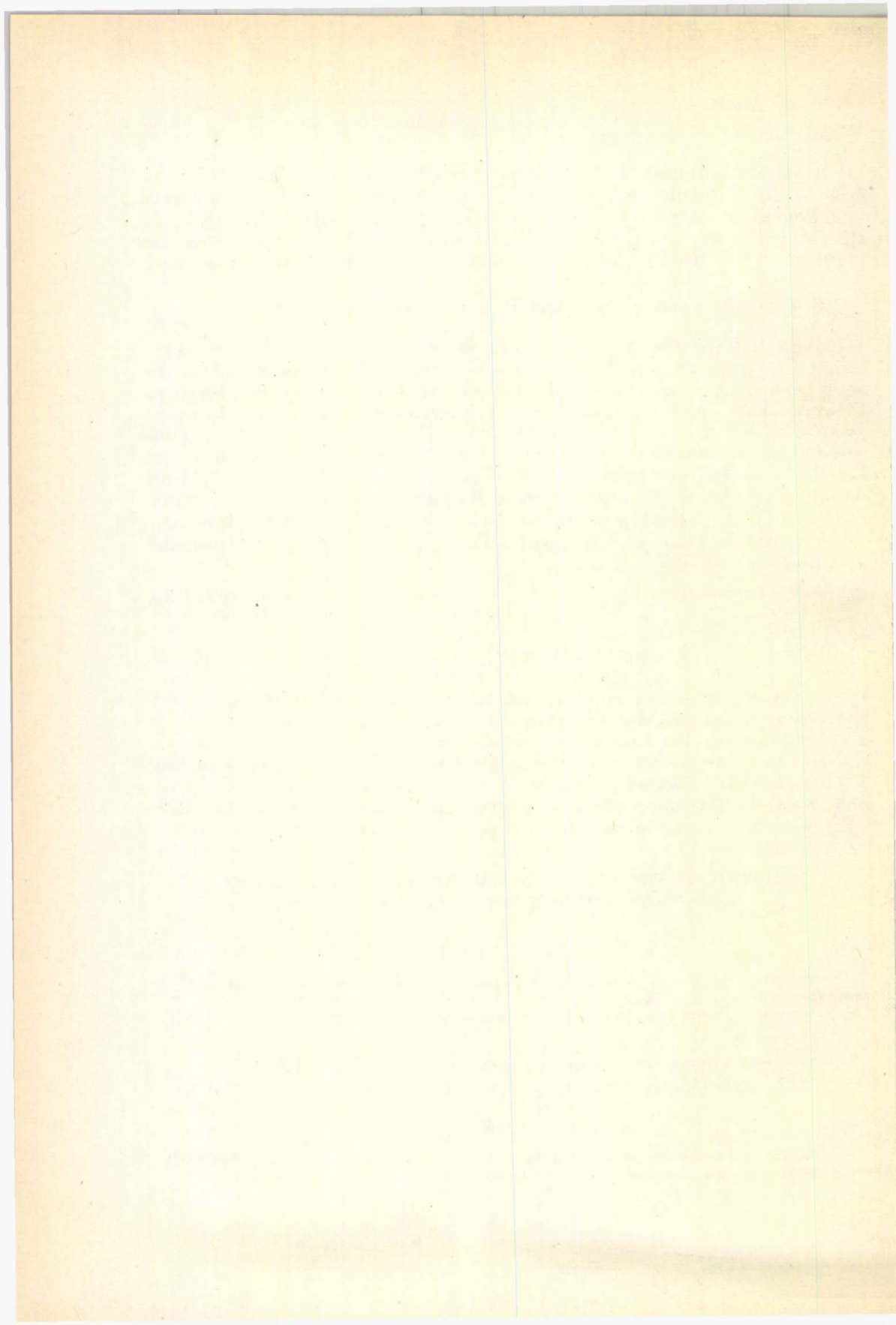
Краткое содержание

Исходя из теории распределения, изучается средняя кривизна и общая кривизна поверхностей в точках, в которых условия регулярности не выполняются. Даются формулы для вычисления обеих кривизн в этих точках.

LES COURBURES D'UNE SURFACE DANS CERTAINS POINTS SINGULIERS, EXPRIMABLES PAR DES DISTRIBUTIONS

R É S U M É

En utilisant la théorie des distributions, l'on étudie les courbures moyennes et totales des surfaces dans des points où les conditions de régularité ne sont pas vérifiées. On donne des formules pour le calcul de ces courbures dans ces points.



THÉORÈMES DE MOYENNE POUR LES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES ET LA THÉORIE DES DISTRIBUTIONS

V. OLARIU

Les théorèmes de moyenne pour les solutions des équations aux dérivées partielles ont une importance particulière dans la théorie des ces équations. On sait qu'un des premiers théorèmes de moyenne a été donné par Gauss pour les fonctions harmoniques, ce qui a permis l'introduction de la notion de „moyenne sphérique“ des fonctions. La méthode de la moyenne sphérique a été utilisée dans les derniers ans assez couramment dans l'étude des solutions des équations de type elliptique, hyperbolique et ultra-hyperbolique. Les idées principales de la moyenne sphérique ont été généralisées, ce qui a conduit à l'introduction d'autres catégories des moyennes: moyenne parabolique, moyenne hyperbolique etc.

Dans ce qui suit, nous donnons une méthode pour la construction des théorèmes de moyenne pour les solutions des équations linéaires aux dérivées partielles, homogènes et aux coefficients constants d'un ordre quelconque, en partant d'une définition convenablement choisie pour les „théorèmes de moyenne“ pour les solutions des équations considérées. Pour cela, nous considérons ces solutions comme des distributions (c'est-à-dire, des fonctionnelles linéaires continues sur un espace fondamental donné). Ces théorèmes de moyenne, contiendront, comme des cas particulières, quelques théorèmes de moyenne connues, mais la plupart sont des théorèmes nouveaux.

Soit une équation linéaire aux dérivées partielles, homogène et aux coefficients constants, d'ordre m ($m \geq 2$), écrite sous la forme

$$(1) \quad P\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0,$$

où $P(\xi)$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ est un polynôme de degré m aux coefficients constants, $\frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$, i est l'unité imaginaire et u est une distribution appartenant à l'espace Φ' , c'est-à-dire, u est une fonctionnelle linéaire et continue sur l'espace fondamental Φ des fonction-test φ .

Par un *théorème de moyenne* pour l'équation (1) nous comprenons une relation de la forme

$$(2) \quad f_r(x) * u(x) = u(x),$$

valable pour toute distribution $u(x)$ qui vérifie l'équation (1), $f_r(x)$ étant une autre distribution de Φ' , dépendant d'un paramètre réel r et le signe * signifie, comme d'habitude, la convolution des distributions entre lesquelles il est posé; naturellement, on suppose que la distribution $f_r(x)$ est ainsi déterminée et que la convolution (2) a un sens.

On voit aisément qu'on peut déterminer toujours des distributions $f_r(x)$ ainsi que l'égalité (2) est valable; par exemple, si $f_r(x) = \delta(x)$, $\delta(x)$ étant la distribution (où la mesure) de Dirac, l'égalité (2) est une identité; en effet, si on applique une propriété bien connue (la convolution de $\delta(x)$ avec n'importe quelle distribution $u(x)$ donne toujours $u(x)$), on obtient $\delta(x) * u(x) = u(x)$; mais cet exemple est un théorème de moyenne banal et on doit démontrer qu'il existe et d'autres distributions $f_r(x) \neq \delta(x)$ qui transforment l'égalité (2) dans une identité, valable pour toute solution $u(x)$ de l'équation (1).

On peut résoudre ce problème en utilisant la théorie de la transformée de Fourier des distributions; cette théorie montre que la relation (2), se transforme, par l'application de cette opération dans une égalité ayant la forme suivante

$$(3) \quad \hat{f}_r(\xi) \cdot \hat{u}(\xi) = \hat{u}(\xi),$$

où le signe $\hat{}$ indique la transformée de Fourier de la distribution sur laquelle il est posé. La relation (3) doit être considérée valable dans l'espace dual (par rapport à la transformée de Fourier) de l'espace Φ' considéré plus haut.

L'espace dual de l'espace Φ sera noté par Ψ' , c'est-à-dire on a $\Psi' = \hat{\Phi}$. Evidemment, si $\varphi \in \Phi$ et $\psi \in \Psi'$ on a

$$\varphi(\xi) = \psi(\xi) = \int_{E_n} \varphi(x) e^{i \langle x, \xi \rangle} dx,$$

où $\langle x, \xi \rangle = x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n$, $dx = dx_1 \dots dx_n$ et E_n est l'espace euclidien à n dimensions; on sait qu'on a aussi $\hat{\Phi}' = \Psi'$.

En revenant à la question posée plus haut, il résulte qu'il existe des distributions $f_r(x)$ qui vérifient la relation (2) s'il existent des multiplicateurs $\hat{f}_r$ dans l'espace Ψ' , pour lesquels est valable la relation duale (3).

Si nous trouvons un tel multiplicateur $\hat{f}_r$, en appliquant la transformée de Fourier inverse, l'égalité (3) se transforme dans l'égalité (2) et un théorème de moyenne (dans le sens précisé plus haut) est trouvé. Nous rappelons que $u(x)$ est une solution-distribution de l'équation aux dérivées partielles (1).

Comme $u(x)$ est une solution pour l'équation (1), cette équation après l'application de la transformée de Fourier se transforme dans l'équation algébrique (dans l'espace dual $\hat{\Phi}'$), vérifiée par la distribution $\hat{u}$:

$$(4) \quad P(\xi) \hat{u}(\xi) = 0,$$

parce que $P(\xi)$ est la transformée de Fourier de l'opérateur différentiel donné par le premier membre de l'équation (1). Supposons maintenant que $\hat{f}_r$ est une fonction holomorphe d'une seule variable z , c'est-à-dire qu'on a la relation

$$(5) \quad \hat{f}_r(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(r) z^k;$$

si $\hat{f}_r[P(\xi)]$ est un multiplicateur dans l'espace $\hat{\Phi}$, on peut trouver un théorème de moyenne pour les solutions de l'équation (I) à l'aide de la distribution $f_r(x)$ (la transformée inverse de $\hat{f}_r[P(\xi)]$); en effet, parce qu'on a $\hat{f}_r[P(\xi)] = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(r) [P(\xi)]^k$, nous pouvons écrire les égalités suivantes:

$$\hat{f}_r[P(\xi)] \cdot \hat{u}(\xi) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k(r) [P(\xi)]^k \right) \hat{u}(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(r) ([P(\xi)]^k \hat{u}(\xi)) = a_0 \hat{u}(\xi)$$

valables parce que si la relation (4) est vérifiée, on a aussi les relations $[P(\xi)]^k \hat{u}(\xi) = 0$, pour $k = 2, 3, \dots$ (c'est-à-dire que si $u(x)$ vérifie l'équation (1), $u(x)$ vérifie aussi toutes les équations déduites par itération de cette équation); par conséquent, si $a_0(r) \neq 0$, si nous posons $g(\xi) = \frac{1}{a_0} \hat{f}_r[P(\xi)]$ on obtient la relation

$$g(\xi) \cdot \hat{u}(\xi) = \hat{u}(\xi),$$

d'où, il résulte une relation de la forme (2), si on applique la transformée inverse de Fourier; ainsi on trouve un théorème de moyenne pour les solutions (distributions) de l'équation (1). Il résulte aussi qu'on peut déterminer un nombre assez grand des théorèmes de moyenne pour les solutions considérées ici.

Si $u(x)$ n'est pas une solution de l'équation (1), c'est-à-dire que si $u(x)$ est une distribution arbitraire de l'espace Φ' , l'égalité déduite plus haut, écrite sous la forme

$$\hat{g}_r(\xi) \cdot \hat{u}(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(r) [P(\xi)]^k \hat{u}(\xi), \quad a_0 = 1,$$

par l'application de la transformée inverse de Fourier conduit à une formule de type „Pizetti“ pour le théorème de moyenne considéré, qui a la forme suivante:

$$(6) \quad f_r(x) * u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(r) P^k \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right) u(x), \quad \hat{f}_r = g_r,$$

où $P^k \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right)$ est l'opérateur obtenu de l'opérateur $P \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right)$ par itération: $P^2 = P(P), \dots, P^k = P(P^{k-1}), \dots (P^0 = 1)$.

Les calculs effectués plus haut montrent que à la différence du cas des solutions ordinaires pour les équations linéaires aux dérivées partielles, où les théorèmes de moyenne peuvent être construites après quelques considérations préliminaires (par exemple, après la déduction des formules de Green), dans le cas des solutions-distributions les théorèmes de moyenne, ainsi que les formules de Pizetti correspondantes peuvent-être déduites immédiatement ; de plus, on peut construire quelques théorèmes de moyenne nous voulous.

En continuant les considérations faites sur la théorie générale des „théorèmes de moyenne“ on peut démontrer encore deux théorèmes générales.

Ainsi, si les coefficients $a_k(r)$ dans le développement (5) ont la forme $a_k(r) = b_k r^{p_k}$ pour $k = 0, 1$ où b_0 et b_1 sont des constantes non-nulles et $p_0 = 0$, $p_1 > 0$ et $\lim_{r \downarrow 0} r^{-p_1} a_k(r) = 0$, $k = 2, 3, \dots$, il est valable un théorème inverse, c'est-à-dire que si l'égalité (2) est valable pour chaque $r > 0$ et pour une distribution $u(x)$, il résulte que $u(x)$ est aussi une solution de l'équation (1).

La démonstration est immédiate: on sait que la relation (2) est équivalente à la relation (3) avec $\hat{f}_r$ donné par (5) et comme b_0 peut être supposé toujours égal à 1, on obtient l'égalité

$$\left\{ \sum_{k=2}^{\infty} r^{-p_k} a_k(r) [P(\xi)]^k + b_1 P(\xi) \right\} \hat{u}(\xi) = 0,$$

d'où, pour $r \downarrow 0$, on obtient l'égalité $P(\xi) \hat{u}(\xi) = 0$, c'est-à-dire l'équation (1).

Enfin, si le multiplicateur $\hat{f}_r(\xi)$ vérifie une équation différentielle par rapport à r , linéaire, homogène et aux coefficients des polynômes des variables $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, la distribution $\hat{f}_r(x) * u(x)$ vérifie aussi une équation linéaire et homogène aux dérivées partielles dans les variables r et $x = (x_1, \dots, x_n)$.

En effet, si l'équation vérifiée par $\hat{f}_r(\xi)$ a la forme

$$\sum_{j=0}^m R_{m-j}(\xi) \frac{d^j}{dr^j} (\hat{f}_r) = 0,$$

où $R_{m-j}(\xi)$ sont des polynômes, la distribution $\hat{f}_r(\xi) \cdot \hat{u}(\xi)$ vérifie la même équation et par l'application de la transformée inverse de Fourier on voit que la distribution $\hat{f}_r(u) * u(x)$ est une solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\sum_{j=0}^m R_{m-j} \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial^j}{\partial r^j} (f_r * u) = 0,$$

si on considère la convolution $f_r * u$ comme une distribution des variables r et $x = (x_1, \dots, x_n)$

Nous donnons maintenant quelques exemples simples.

I. Soit $f_r(x) = (2\pi r^{-p})^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} r^p |x|^2\right)$ où $p > 0$ et $|x|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$; parce qu'on a $\hat{f}_r(\xi) = \exp\left(-\frac{1}{2} r^p |\xi|^2\right)$, il résulte:

$$\hat{f}_r(\xi) \cdot \hat{u}(\xi) = \hat{u} - \frac{1}{2} r^p |\xi|^2 \hat{u} + \dots = \hat{u}(\xi),$$

si $u(x)$ est une solution de l'équation de Laplace $\Delta_n u(x) = 0$ (c'est-à-dire on a $|\xi|^2 \hat{u}(\xi) = 0$). Le théorème de moyenne correspondant a l'expression suivante

$$(2\pi r^{-p})^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} r^p |x|^2\right) * u(x) = u(x),$$

pour toute solution $u(x)$ de l'équation $\Delta_n u = 0$; ici on peut supposer $\Phi = \mathcal{J}$, (c'est-à-dire on peut supposer que $u(x)$ est une distribution tempérée). Mais, comme on sait que toute distribution harmonique est une fonction harmonique, la convolution écrite plus haut s'exprime à l'aide d'une intégrale et on a le théorème de moyenne suivant:

$$(7) \quad (2\pi r^{-p})^{-\frac{n}{2}} \int_{E_n} e^{-\frac{1}{2} r^p |x-y|^2} u(y) dy = u(x),$$

valable pour toute fonction harmonique qui vérifie une inégalité de la forme $|u(x)| \leq M e^{A|x|^2}$, M et A étant des constantes non-négatives. De plus, parce que $\hat{f}_r(\xi)$ vérifie l'équation $\frac{d}{dr} + \frac{p}{2} \cdot r^{p-1} |\xi|^2 = 0$, la distribution $v(x, r)$ déterminée par le premier membre de (7), où $u(x)$ est une distribution arbitraire est une solution pour l'équation

$$(8) \quad \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{p}{2} r^{p-1} \Delta_n v = 0.$$

Inversement, on peut considérer que la distribution $v(x, r)$ définie plus haut est une solution de l'équation (8) qui pour $r = 0$ coïncide avec la distribution arbitraire $u(x)$. En utilisant le développement en série pour la fonction exponentielle on peut trouver aisément la formule de Pizetti correspondante.

II. Soit $f_r(x) = \left(\frac{r}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \delta\left(t + \frac{r}{2}\right) \exp\left\{-\frac{1}{2r} |x|^2\right\}$; un calcul simple nous montre qu'on a l'égalité: $\hat{f}_r(\xi) = \exp\left(\frac{r}{2} (i\tau - |\xi|^2)\right)$, et par conséquent on a $\hat{f}_r \cdot \hat{u} = \hat{u} + \frac{r}{2} (i\tau - |\xi|^2) \hat{u} + \dots = \hat{u}$ si on a $(i\tau - |\xi|^2) \hat{u} = 0$, c'est-à-dire si $u(x)$ est une solution — distribution pour l'équation de la

chaleur $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_n u = 0$. Le théorème de moyenne correspondant a donc la forme

$$\left(\frac{r}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \delta\left(t + \frac{r}{2}\right) e^{-(2r)^{-1}|x|^2} * u(t, x) = u(t, x)$$

pour chaque solution-distribution de l'équation de la chaleur. La formule de Pizetti et l'équation aux dérivées partielles correspondante sont assez faciles de déterminer.

III. Soit maintenant $f_r(\xi) = P_{\frac{n}{2}-1}(r|\xi|)$, où $P_s(z)$ est une fonction de Bessel normée: $J_s(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^s \Gamma(s+1) P_s(z)$, $J_s(z)$ étant une fonction de Bessel de premier espèce; comme on sait, on a:

$$P_s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k(s+1) \dots (s+k)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}, \quad P_s(0) = 1.$$

De plus, $P_s(r|\xi|)$ vérifie l'équation différentielle

$$r \frac{d^2 w}{dz^2} + (n-1) \frac{dw}{dz} + r|\xi|^2 w = 0, \quad s = \frac{n}{2} - 1.$$

Conformément à la théorie exposée plus haut, le théorème de moyenne construite à l'aide de ce $\hat{f}_r$, plus précisément la convolution $f_r(x) * u(x)$, vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$(9) \quad \frac{\partial^2 v(r, x)}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial v(r, x)}{\partial r} - \Delta_n v(r, x) = 0, \quad v(r, x) = f_r(x) * u(x)$$

et pour déterminer la distribution $f_r(x)$ pour laquelle on a $\hat{f}_r = P_{\frac{n}{2}-1}(r|\xi|)$ il suffit de trouver la solution élémentaire $E_r(x)$ pour l'équation (9) ainsi que $E_0(x) = \delta(x)$. Pour cela on pose $v = r^{1-n} v_1$ et v_1 sera une solution pour l'équation

$$r^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial r^2} + (1-n)r \frac{\partial v_1}{\partial r} + (n-1)v_1 - r^2 \Delta_n v_1 = 0;$$

or, cette dernière équation admet la solution $\delta(r-|x|)$ comme on voit aisément. Il résulte que la solution élémentaire cherchée a la forme $E_r(x) = A r^{1-n} \delta(r-|x|)$; pour déterminer la constante A , nous écrirons la fonctionnelle correspondante à cette distribution; on obtient:

$$\langle E_r(x), \varphi(x) \rangle = A r^{1-n} \int_{|x|=r} \varphi(x) d\sigma_r = A \omega_n M_r[\varphi] \quad \omega_n = 2 \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

$M_r[\varphi]$ étant la moyenne sphérique ordinaire pour la fonction $\varphi(x)$ et pour avoir $E_0(x) = \delta(x)$ on doit prendre $A = \frac{1}{\omega_n}$; donc on a l'égalité suivante:

$$\frac{r^{1-n}}{\omega_n} (r - |x|) = P_{\frac{n}{2}-1}(r|\xi|), \quad n = 2, 3, \dots$$

avec la mention que la transformée de Fourier est considérée par rapport aux variables $x = (x_1, \dots, x_n)$. Donc si $u(x)$ est une distribution harmonique on obtient le théorème de moyenne de Gauss,

$$\frac{r^{1-n}}{\omega_n} \delta(r - |x|) * u(x) = u(x).$$

En utilisant le développement de $P_s(z)$ on peut obtenir la formule connue de Pizetti pour la moyenne sphérique des distributions $u(x)$:

$$M_r[u(x)] = u(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+1) \dots \left(k + \frac{n}{2}\right) 2^{2k}} \Delta_n^k u(x),$$

si on convienne de noter la convolution $\frac{r^{1-n}}{\omega_n} \delta(r - |x|) * u(x)$ par $M_r[u(x)]$.

On peut utiliser les résultats démontrés plus haut pour obtenir des relations analogues pour la moyenne sphérique de volume; pour cela il suffit de remplacer n par $n+2$ dans toutes les formules déduites, parce que on sait [2] que la moyenne sphérique d'une fonction coïncide avec la moyenne sphérique de volume pour la même fonction, mais considérée dans un espace à deux dimensions au moins (naturellement, la fonction considérée dépend d'un nombre de variables égal au nombre des variables de l'espace dans lequel on considère la moyenne sphérique de volume).

IV. Soit $\hat{f}_r = P_{\frac{n-1}{2}}[r(\tau^2 - |\xi|^2)]$, où $P_s(z)$ est la fonction de Bessel

définie plus haut. En utilisant les résultats du p. III, on obtient un théorème de moyenne pour les solutions-distributions de l'équation des ondes

$\square_n u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta_n u = 0$; parce que l'équation aux dérivées partielles pour cette moyenne coïncide avec l'équation donnée dans [3] pour la moyenne hyperbolique, on peut supposer que la convolution $\hat{f}_r(t, x) * u(t, x)$ coïncide avec cette moyenne hyperbolique.

Évidemment, on peut continuer avec les exemples; nous terminons les considérations sur les théorèmes de moyenne avec la démonstration d'un théorème général:

A toute solution (distribution) de n'importe quelle équation aux dérivées partielles aux coefficients constants, correspond au moins un théorème de moyenne (au sens défini plus haut).

En effet, soit $E_r(x)$ le solution fondamentale de l'équation

$$(10) \quad \frac{\partial v}{\partial r} = P\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) v,$$



correspondante au problème de Cauchy $v(r, x)|_{r=0} = \delta(x)$; comme il est bien connu, cette solution fondamentale existe toujours. Soit $u(x)$ une solution arbitraire de l'équation $P\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0$, ainsi choisie que la convolution $E_r(x) * u(x)$ existe. On voit aussi que l'égalité suivante est valable: $E_r(x) * u(x) = u(x)$ pour tout $r > 0$, parce que toute solution de l'équation $P\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0$ est aussi une solution de l'équation (10) qui vérifie la condition initiale $v(0, x) = u(x)$ et cette solution a la forme $E_r(x) * u(x)$.

Reçu le 15 mai 1969

Université de Bucarest
Faculté de mathématique-mécanique

BIBLIOGRAPHIE

- [1] I. M. Ghelfand, G. E. Silow: Les fonctions généralisées et les opérations avec elles, Moscou, 1958.
- [2] V. Olariu: Ecuațiile cu derivate parțiale ale mediilor sferice și consecințe deduse din ele, Analele Universității București, Seria Științelor Naturii, Matematică-Mecanică, Nr. 1, Anul XIII — 1964.
- [3] V. Olariu: Théorèmes de moyenne pour l'équation des ondes, Bull. Math, de la Soc. Math. Phys. de la R.P.R. tome 6 (54), nr. 3—4, 1962.

BOOLEAN EQUATIONS FOR THE CHROMATIC DECOMPOSITION OF GRAPHS

SERGIU RUDEANU

§ 0. Introduction

The aim of this paper is to point out a case when the problem of finding a minimal chromatic decomposition of a graph can be reduced to the same problem for a subgraph (§1). This reduction can be performed via the Boolean methods suggested in [5] (see also [3], Chapter X, §§3 and 5) (§2).

We recall first some basic definitions. A (*directed*) graph is a pair $G = (V, R)$, where V is a finite non-empty set of elements called *points* or *vertices*, while R is a set of distinct (ordered) pairs of points¹⁾. Each such (ordered) pair (i, j) is called a (*directed*) *line*, while the points i and j are said to be *adjacent*. A subset $S \subseteq V$ is called *independent* (or, *internally stable* in the French terminology), iff no two points of S are adjacent. An independent set S is called *maximal*, iff there is no independent set S' satisfying the relations $S \subseteq S'$, and $S \neq S'$ ²⁾. A *chromatic decomposition* of a graph $G = (V, R)$ is a partition of its set V of vertices into independent subsets (i.e., a covering of V with pairwise disjoint independent subsets $\neq \emptyset$). A chromatic decomposition $V = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_\gamma$ ³⁾ is said to be *minimal*, iff there is no chromatic decomposition of V involving less than γ independent subsets. The number γ of independent sets occurring in any minimal chromatic decomposition of V is called the *chromatic number* of the graph G . A *subgraph* of a graph $G = (V, R)$ is a graph G' whose vertices are vertices of G and whose lines are those lines $(i, j) \in R$ for which i and j are vertices of G' , and only those lines; in other words $G' = (V', R \cap (V' \times V'))$, where $\emptyset \neq V' \subseteq V$. We shall simply denote $R \cap (V' \times V') = R/V'$; hence $G' = (V', R/V')$.

¹⁾ As a matter of fact, a slightly more general definition is sometimes adopted, allowing the existence of *loops*, i.e. of lines joining some points to themselves. However, when defining the concept of chromatic decomposition, it is convenient to consider only graphs without loops.

²⁾ Since every singleton is clearly an independent set and the set V is finite, it follows that every vertex is contained in a maximal independent set. On the other hand, the dual concept of „minimal independent set“ presents no interest, since $\emptyset$ would be the unique set with this property.

³⁾ We denote by $\cup$ and $\bigcup$ set-theoretical joins, while $\vee$ means Boolean disjunction.

A Reduction Theorem

In this section we shall demonstrate the following

THEOREM. Let $G = (V, R)$ be a graph with the property that it contains a vertex v_0 which is contained in exactly one maximal independent set V_0^1 . Let G' be the subgraph $G' = (V - V_0, R|V - V_0)$. Then:

I) There exists a minimal chromatic decomposition of G containing the set V_0 .

II) Formula

$$(1) \quad V = V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_h$$

expresses a chromatic decomposition of G if and only if

$$(2) \quad V - V_0 = V_1 \cup \dots \cup V_h$$

is a chromatic decomposition of G' .

III) (1) is a minimal chromatic decomposition of G if and only if (2) is a minimal chromatic decomposition of G' .

Proof. I) It follows from the hypothesis that V_0 belongs to every covering of V with maximal independent sets, and in particular to every minimal such covering. Let

$$(3) \quad V = V_0 \cup W_1 \cup \dots \cup W_h$$

be a minimal covering of V with maximal independent sets. As is well-known (see, for instance, [6] or [2]; see also [3], Chapter X, §5), putting

$$(4) \quad V_i = W_i - \bigcup_{j=0}^i V_j \quad (i = 1, 2, \dots, h)$$

we obtain a minimal chromatic decomposition (1).

II) Obvious.²⁾

III) Assume that (1) is a minimal chromatic decomposition of G . As we have just noticed, it follows that (2) is a chromatic decomposition of G' ; if it is not minimal, there exists a chromatic decomposition

$$(5) \quad V - V_0 = X_1 \cup \dots \cup X_k$$

of G' , with $k < h$. Hence again by II), it follows that

$$(6) \quad V = V_0 \cup X_1 \cup \dots \cup X_k$$

is a chromatic decomposition of G involving $k + 1$ sets; since $k + 1 < h + 1$, this is a contradiction. We have thus proved that (2) is a minimal chromatic decomposition of G' .

Conversely, if (2) is a minimal chromatic decomposition of G' , it results first that (1) is a chromatic decomposition of G . If (1) is not minimal, there

¹⁾ We recall that every vertex is contained in at least one maximal independent set.

²⁾ Property II) is valid even if we only assume that V_0 is an independent set of G .

exists a chromatic decomposition $\mathcal{C}$ of G involving $l < h + 1$ independent sets. Now every independent set is included in a maximal one, so that, starting from $\mathcal{C}$, we can obtain a covering of G with $m \leq l$ maximal independent sets. This covering has the form

$$(7) \quad V = V_0 \cup Y_1 \cup \dots \cup Y_{m-1},$$

for V_0 belongs to every covering of V with maximal independent sets. Using formulas of the type (4), we obtain from (7) a chromatic decomposition of G of the form

$$(8) \quad V = V_0 \cup Z_1 \cup \dots \cup Z_{m-1}$$

This implies that

$$(9) \quad V - V_0 = Z_1 \cup \dots \cup Z_{m-1}$$

is a chromatic decomposition of G' ; since $m - 1 \leq l - 1 < h$, this is a contradiction. Thus (1) is a minimal chromatic decomposition of G and the proof of the Theorem is complete.

COROLLARY. *Under the hypotheses of the Theorem, the chromatic number of G' is $\gamma - 1$, where γ denotes the chromatic number of G .*

§ 2. Application of Boolean Equations

As we have recalled in §1, every minimal covering of a graph with maximal independent sets can *immediately* be transformed into a minimal chromatic decomposition (see formulas (4)). It follows that the determination of a minimal chromatic decomposition — and, implicitly, of the chromatic number — can be performed in the following two steps:

- 1° determination of all maximal independent sets;
- 2° determination of a minimal covering with maximal independent sets.

We have shown in [5] (see also [3]) that both steps 1° and 2° can be performed by solving certain Boolean equations. Now the method of bifurcations, which we have suggested for the solution of those Boolean equations, enables us to detect the existence of vertices v_0 with the property indicated in the Theorem we have just proved. If such a vertex exists, the problem is reduced to the corresponding problem for the subgraph G' , to which the same Boolean procedures can be applied; etc. This remark may result in a sensible simplification of the computations, as will be illustrated below by two examples.

Let us recall first the essentials of the methods suggested in [5].

1° As is well-known, a graph $G = (V, R)$ where $V = \{1, 2, \dots, n\}$ is completely characterized by its *adjacency matrix* $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1,\dots,n}$, defined as follows: for every $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $a_{ij} = 1$ if $(i, j) \in R$, $a_{ij} = 0$ if $(i, j) \notin R$. Every subset $S \subseteq V$ can be described by its *characteristic vector* $(x_1, \dots, x_n)$, defined as follows: for every $i \in \{1, \dots, n\}$, $x_i = 1$ if $i \in S$, $x_i = 0$ if $i \notin S$. It is known [4], [5]; or [3], Chapter X, §3) that S is a maximal inde-

pendent set if and only if its characteristic vector satisfies the system of Boolean equations

$$(10) \quad x_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\bar{a}_{ij} \bar{a}_{ji} \cup \bar{x}_j) \quad (i = 1, \dots, n);$$

the right-hand side of (10) is simply the (Boolean) product of those variables $\bar{x}_j$ for which $(i, j) \in R$ or $(j, i) \in R$ (or both).

2°. After we have determined the m maximal internally stable sets $S_1, \dots, S_m$, we proceed as follows. Let $B = \|b_{ik}\|_{i=1, \dots, n, k=1, \dots, m}$ be the *covering matrix*, defined by $b_{ik} = 1$ if $i \in S_k$, $b_{ik} = 0$ if $i \notin S_k$ ($i = 1, \dots, n$; $k = 1, \dots, m$); on the other hand, as before, every $\mathcal{S} \subseteq \{S_1, \dots, S_m\}$ can be described by its *characteristic vector* $(y_1, \dots, y_m)$ where, for every $k = 1, \dots, m$, $y_k = 1$ if $S_k \in \mathcal{S}$; $y_k = 0$ if $S_k \notin \mathcal{S}$. Then as it is easy to see, the sets of $\mathcal{S}$ determine a minimal covering of V if and only if the characteristic vector of $\mathcal{S}$ is a solution of the following bivalent linear program:

$$(11) \quad \text{Min} \sum_{k=1}^m y_k$$

subject to

$$(12) \quad \sum_{k=1}^m b_{ik} y_k \geq 1 \quad (i = 1, \dots, n),$$

$$(13) \quad y_k \in \{0, 1\} \quad (k = 1, \dots, m).$$

This can be solved by pseudo-Boolean programming [3]. A variant of this approach uses the Boolean form

$$(14) \quad \bigcup_{k=1}^m b_{ik} y_k = 1 \quad (i = 1, \dots, n)$$

of the constraints (12) and (13) ([5], or [3], Chapter X, §5, Example 16).

Example 1. Let G be the (undirected) graph (communicated by I. Tomescu) with the adjacency matrix given in Table 1. The equations (10) become:

$$(15.1) \quad x_1 = \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_5 \bar{x}_7,$$

$$(15.2) \quad x_2 = \bar{x}_1 \bar{x}_3 \bar{x}_4,$$

$$(15.3) \quad x_3 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 \bar{x}_5,$$

$$(15.4) \quad x_4 = \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_5 \bar{x}_6 \bar{x}_7,$$

$$(15.5) \quad x_5 = \bar{x}_1 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \bar{x}_7,$$

$$(15.6) \quad x_6 = \bar{x}_4 \bar{x}_7,$$

$$(15.7) \quad x_7 = \bar{x}_1 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \bar{x}_6.$$

TABLE 1

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	1	0	1	0	1
2	1	0	1	1	0	0	0
3	1	1	0	1	1	0	0
4	0	1	1	0	1	1	1
5	1	0	1	1	0	0	1
6	0	0	0	1	0	0	1
7	1	0	0	1	1	1	0

As we have recommended in [5], we begin the bifurcation process with the „longest“ equation, i.e. with (15.4); we have to consider

Case 1: $x_4 = 1$.

It follows from (15.4) that $x_2 = x_3 = x_5 = x_6 = x_7 = 0$, hence (15.1) becomes $x_1 = 1$ and the whole system is fulfilled. Thus there exists a single solution $(x_1, \dots, x_7)$ of (15) satisfying $x_4 = 1$, namely $(1, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$. This means that $V_0 = \{1, 4\}$ is the single maximal independent set containing the vertex 4. Therefore we interrupt the branching process and apply the reduction theorem.

Let $V' = V - V_0 = \{2, 3, 5, 6, 7\}$ and $R' = R/V'$. The equations (10) corresponding to the subgraph $G' = (V', R')$, can immediately be obtained from (15):

$$\begin{aligned} (16.2) \quad & x_2 = \bar{x}_3, \\ (16.3) \quad & x_3 = \bar{x}_2 \bar{x}_5, \\ (16.5) \quad & x_5 = \bar{x}_3 \bar{x}_7, \\ (16.6) \quad & x_6 = \bar{x}_7, \\ (16.7) \quad & x_7 = \bar{x}_5 \bar{x}_6; \end{aligned}$$

we apply to this system the bifurcation process.

Case 1': $x_5 = 1$.

It follows from (16.5) that $x_3 = x_7 = 0$, hence (16.2) and (16.6) imply $x_2 = 1$ and $x_6 = 1$ respectively; the whole system is fulfilled. Thus there is a unique solution $(x_2, x_3, x_5, x_6, x_7)$ of (16) satisfying $x_5 = 1$, namely $(1, 0, 1, 1, 0)$.

We interrupt again the branching process in order to apply the reduction theorem to the maximal independent set $V'_0 = \{2, 5, 6\}$ of G' . Let $V'' = V' - V'_0 = \{3, 7\}$, $R'' = R'/V''$ and $G'' = (V'', R'')$. We obtain from (16) the equations (10) corresponding to G'' :

$$\begin{aligned} (17.3) \quad & x_3 = 1, \\ (17.7) \quad & x_7 = 1, \end{aligned}$$

showing that $V''_0 = V''$ itself is the unique maximal independent set of G'' .

Therefore, by iterated application of the reduction theorem, we see that

$$(18) \quad V = V_0 \cup V'_0 \cup V''_0 = \{1, 4\} \cup \{2, 5, 6\} \cup \{3, 7\}$$

is a minimal chromatic decomposition of the graph G , and the chromatic number of G is thus 3.

We notice that it was not necessary to apply step 2° of our previous algorithm.

Example 2. Let us resume the graph studied in [1]; it has the adjacency matrix given in Table 2. The equations (10) become:

$$(19.1) \quad x_1 = \bar{x}_4 \bar{x}_6 \bar{x}_7 \bar{x}_8 \bar{x}_9 \bar{x}_{10},$$

$$(19.2) \quad x_2 = \bar{x}_6 \bar{x}_7,$$

$$(19.3) \quad x_3 = \bar{x}_4 \bar{x}_8 \bar{x}_{10},$$

$$(19.4) \quad x_4 = \bar{x}_1 \bar{x}_3 \bar{x}_6 \bar{x}_7 \bar{x}_{10},$$

$$(19.5) \quad x_5 = \bar{x}_6 \bar{x}_8 \bar{x}_{10},$$

$$(19.6) \quad x_6 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 \bar{x}_5,$$

$$(19.7) \quad x_7 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 \bar{x}_9,$$

$$(19.8) \quad x_8 = \bar{x}_1 \bar{x}_3 \bar{x}_5 \bar{x}_9,$$

$$(19.9) \quad x_9 = \bar{x}_1 \bar{x}_7 \bar{x}_8,$$

$$(19.10) \quad x_{10} = \bar{x}_1 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5.$$

TABLE 2

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1
2	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
3	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1
4	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1
5	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1
6	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0
7	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0
8	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
9	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0
10	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0

Case 1: $x_1 = 1$, implies $x_4 = x_6 = x_7 = x_8 = x_9 = x_{10} = 0$, then $x_2 = 1$, $x_3 = 1$ and $x_5 = 1$, hence $(1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ is the single solution with $x_1 = 1$; it corresponds to the maximal independent set $V_0 = \{1, 2, 3, 5\}$ of G .

Let $V' = V - V_0 = \{4, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $R' = R/V'$ and $G' = (V', R')$. The system (19) reduces to

$$(20.4) \quad x_4 = \bar{x}_6 \bar{x}_7 \bar{x}_{10},$$

$$(20.6) \quad x_6 = \bar{x}_4,$$

$$(20.7) \quad x_7 = \bar{x}_4 \bar{x}_9,$$

$$(20.8) \quad x_8 = \bar{x}_9,$$

$$(20.9) \quad x_9 = \bar{x}_7 \bar{x}_8,$$

$$(20.10) \quad x_{10} = \bar{x}_4.$$

Case 1': $x_4 = 1$, implies $x_6 = x_7 = x_{10} = 0$, and the system reduces to $x_8 = \bar{x}_9$, $x_9 = \bar{x}_8$. We have thus found for $(x_4, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10})$ the solutions $(1, 0, 0, 0, 1, 0)$ and $(1, 0, 0, 1, 0, 0)$, corresponding to the following maximal independent sets of G' : $V'_1 = \{4, 9\}$ and $V'_2 = \{4, 8\}$.

Case 2': $x_4 = 0$, implies $x_6 = 1$, $x_{10} = 1$ and the whole system reduces to $x_7 = \bar{x}_9$, $x_8 = \bar{x}_9$ and $x_9 = \bar{x}_7 \bar{x}_8$. A bifurcation with respect to x_9 gives immediately the solutions $(0, 1, 0, 0, 1, 1)$ and $(0, 1, 1, 1, 0, 1)$, corresponding to the sets $V'_3 = \{6, 9, 10\}$ and $V'_4 = \{6, 7, 8, 10\}$, respectively.

The bifurcation process is over.

We proceed now to step 2°. The covering matrix is given in Table 3. The problem is now

$$(21) \quad \text{Min } (y_1 + y_2 + y_3 + y_4),$$

where the Boolean variables y_k are subject to

$$(22.4) \quad y_1 \vee y_2 = 1,$$

$$(22.6) \quad y_3 \vee y_4 = 1,$$

$$(22.7) \quad y_4 = 1,$$

$$(22.8) \quad y_2 \vee y_4 = 1,$$

$$(22.9) \quad y_1 \vee y_3 = 1,$$

$$(22.10) \quad y_3 \vee y_4 = 1.$$

TABLE 3

i \ k				
	1	2	3	4
4	1	1	0	0
6	0	0	1	1
7	0	0	0	1
8	0	1	0	1
9	1	0	1	0
10	0	0	1	1

The system (22) is equivalent to the unique Boolean equation

$$(23) \quad (y_1 \vee y_2) y_4 (y_1 \vee y_3) = 1,$$

or, equivalently,

$$(24) \quad y_4 (y_1 \vee y_2 y_3) = 1.$$

The problem (21), (24) has obviously the unique solution (1, 0, 0, 1) (which can also be determined by the methods suggested in [5] or in [3]).

Therefore $V' = V'_1 \cup V'_4$ is a minimal chromatic decomposition of G' , hence

$$(25) \quad V = V_0 \cup V'_1 \cup V'_4 = \{1, 2, 3, 5\} \cup \{4, 9\} \cup \{6, 7, 8, 10\}$$

is a minimal chromatic decomposition of G , which has the chromatic number 3.

CONCLUDING REMARKS

The application of the procedure suggested in this paper requires an easy test for determining whether or not a given vertex belongs to a unique maximal independent set. Jac. M. Anthonisse remarked that this happens if and only if the set of all vertices which are not adjacent to the given vertex, is independent. He devised an ALGOL program for performing this test.

On the other hand, as noticed by a referee, it would be interesting to have a characterization of those graphs for which the reduction theorem can be iterated until a minimal chromatic decomposition is obtained.

This happens in particular if every vertex is contained in a unique maximal independent set. J. M. Anthonisse remarked that a triangle is an example of such a graph. He also gave an example of a graph in which every vertex belongs to several maximal independent sets (a planar graph which looks like the projection of the frustum of a triangular pyramid on its base).

Received on September 15th, 1969

University of Bucharest
Faculty of mathematics-mechanics

REFERENCES

1. J. M. Anthonisse: *Determination of the Chromatic Number of a Graph*. Stichting Math. Centrum, Amsterdam, Adeling Math. Statistiek, S 393, March 1968.
2. P. L. Hammer, I. Rosenberg: *Application of Pseudo-Boolean Programming to the Theory of Graphs*. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete, 3 (1964), 167—176.
3. P. L. Hammer, S. Rudeanu: *Boolean Methods in Operations Research and Related Areas*. Springer-Verlag, Berlin /Heidelberg/ /New York, 1968.
4. K. Maghout: *Détermination des nombres de stabilité et du nombre chromatique d'un graphe*. C. R. Acad. Sci. Paris, 248 (1959), 3522—3523.
5. S. Rudeanu: *On Solving Boolean Equations in the Theory of Graphs*. Rev. Roumaine Math. Pures Appl., 11 (1966), 653—664.
6. J. Weismann: *Boolean Algebra, Map Colouring and Interconnections*. Amer. Math. Monthly, 60 (1962), 608—613.

CONSIDÉRATIONS CONCERNANT L'INTRODUCTION DES FONCTIONS POTENTIEL DE DÉPLACEMENT DANS LES PROBLÈMES EN ESPACE DE LA THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ (CAS STATIQUE)

P. P. TEODORESCU

1. L'utilisation des *fonctions potentiel* est extrêmement importante pour la formulation des problèmes de la théorie de l'élasticité. Dans le cas d'une formulation en déplacements on a à faire avec des *fonctions de déplacement*, tandis que dans le cas d'une formulation en tensions on introduit des *fonctions de tension*; dans ce qui va suivre on va s'occuper de l'introduction des fonctions de déplacement dans les problèmes tridimensionnels statiques de l'élasticité.

2. En 1947, G. Fichera [8] a démontré qu'on ne peut pas représenter la solution générale d'un problème en espace de la théorie de l'élasticité à l'aide d'une seule fonction potentiel.

On va tout d'abord mentionner la formulation donnée par B. G. Galerkin [9],..., [13], en 1930, en utilisant trois fonctions de déplacement biharmoniques; ces fonctions peuvent être considérées comme les composantes d'un vecteur biharmonique (le vecteur de Galerkin).

L'on observe qu'en utilisant la formule de E. Almansi [1] une fonction biharmonique $F = F(x, y, z)$

$$(1) \quad \Delta\Delta F = 0$$

s'exprime à l'aide de deux fonctions harmoniques $\Phi = \Phi(x, y, z)$ et $\Psi = \Psi(x, y, z)$

$$(2) \quad \Delta\Phi = \Delta\Psi = 0$$

sous la forme

$$(3) \quad F = \Phi + [a + bx + cy + dz + e(x^2 + y^2 + z^2)] \Psi,$$

où a, b, c, d, e sont des constantes; b, c, d, e ne peuvent pas s'annuler à la fois pour avoir une fonction F qui ne soit pas harmonique.

C'est ainsi que dans la représentation de Galerkin interviennent six fonctions harmoniques qui doivent être déterminées à l'aide de trois conditions dans un point du contour. Il existe ainsi une triple nondétermination fonctionnelle; l'état de déplacement est déterminé d'une manière

univoque, abstraction faisant d'un déplacement de corps rigide, mais les fonctions de déplacement ne jouissent pas de la même propriété.

3. Une formulation en déplacements, qui peut être déduite aisément de celle d'en haut à l'aide de la formule d'Almansi, a été donnée par P. F. Papkovich [25], [26], en 1932, en utilisant quatre fonctions harmoniques; elles ont été trouvées aussi, d'une manière indépendante, par G. D. Grodskii [14], étant publiée seulement en 1935, après avoir été présentée en 1928 sous la forme d'une conférence. Ce dernier travail a passé inaperçu, quoique P. F. Papkovich lui ait reconnu ultérieurement la priorité. Le résultat a été retrouvé ultérieurement, en 1934, d'une manière indépendante par H. Neuber [24], qui a donné aussi les premières applications; la représentation respective est connue sous le nom de représentation Papkovich-Neuber.

R. A. Eubanks et E. Sternberg [7] se sont occupés de la *complétude* de cette représentation (du fait que tout état de sollicitation peut être exprimé sous cette forme; dans ce cas, toute représentation de cette forme correspond à un état de sollicitation possible). Ils ont démontré que, exceptant le cas où le coefficient de contraction transversale de Poisson est $\mu = 1/4$, l'une des fonctions harmoniques ci-dessus peut être prise égale à zéro ou peut être exprimée par rapport aux autres fonctions, comme il convient le plus dans le calcul; donc, en exceptant le cas $\mu = 1/4$, l'état de sollicitation du corps peut être déterminé à l'aide de trois fonctions harmoniques. C'est ainsi qu'on a à déterminer trois fonctions harmoniques pour lesquelles l'on donne trois conditions dans un point quelconque du contour. Les trois fonctions sont ainsi déterminées d'une manière univoque pour un domaine simplement connexe si les charges sur le contour sont en équilibre; on ne connaît pas une démonstration de cette affirmation (ni un contreexemple); fort probablement qu'elle est vraie, par analogie au problème plan.

En utilisant la méthode des matrices associées aux équations différentielles aux dérivées partielles, Gr. C. Moisil [23] a retrouvé, d'une manière simple et élégante, la représentation de Galerkin; D. Ionescu [15] a fait aussi une étude de ce problème.

4. Des problèmes connexes à ceux mentionnés ci-dessus ont fait l'objet des études de V. I. Blokh [2], F. S. Churikov [6], R. D. Mindlin [21] et M. G. Slobodianskii [27]; le dernier a considéré aussi le cas des domaines multiplement connexes.

D'autres représentations, similaires par leur forme à la représentation Papkovich-Neuber, sont dues à J. V. Boussinesq [4], [5], A. Timpe [31] (pour des corps de rotation), W. Thomson [30] et E. Trefftz [32]. L. Solomon [28] donne une présentation unitaire des différentes représentations mentionnées ci-dessus.

A. Moisil [22] trouve un analogue du vecteur de Galerkin pour les corps élastiques à isotropie transverse; C. I. Borş [3] donne aussi quelques résultats pour ce type de corps.

Des relations entre les différents types de représentations étudiées se trouvent dans le livre de A. I. Krutkov [16]; mentionnons aussi un excellent article de synthèse de K. Marguerre [20]. Des présentations

amples et systématiques sont données tant dans le traité classique de A. E. H. Love [18] que dans le livre de A. I. Lurie [19].

5. Dans une solution en déplacements on aboutit, dans l'absence des forces volumiques, aux équations de G. Lamé [17]

$$(4) \quad \begin{aligned} \Delta u + \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial x} &= 0, \\ \Delta v + \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial y} &= 0, \\ \Delta w + \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial z} &= 0, \end{aligned}$$

où u, v, w sont les déplacements et θ est la déformation volumique, donnée par

$$(5) \quad \theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

L'influence des forces volumiques peut être mise en évidence à l'aide de certaines intégrales particulières.

Dans ce qui va suivre, on va donner une démonstration originale de la représentation Papkovitch-Neuber, démonstration qui assure la complétude pour un domaine simplement connexe.

6. Sans perdre la généralité, l'on peut exprimer les déplacements sous la forme

$$(6) \quad u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \kappa}{\partial z},$$

où les fonctions $\varphi = \varphi(x, y, z)$, $\psi = \psi(x, y, z)$ et $\kappa = \kappa(x, y, z)$ sont continues et dérivables tant qu'il est nécessaire; les équations (4) deviennent

$$(4') \quad \begin{aligned} \Delta \varphi + \frac{1}{1-2\mu} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \kappa}{\partial z^2} \right) &= f, \\ \Delta \psi + \frac{1}{1-2\mu} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \kappa}{\partial z^2} \right) &= g, \\ \Delta \kappa + \frac{1}{1-2\mu} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \kappa}{\partial z^2} \right) &= h, \end{aligned}$$

où les fonctions $f = f(y, z)$, $g = g(z, x)$ et $h = h(x, y)$ dépendent chacune de deux variables seulement.

Par soustraction, les équations (4') conduisent à

$$(7) \quad \begin{aligned} \Delta(\psi - \kappa) &= g - h, \\ \Delta(\kappa - \varphi) &= h - f, \\ \Delta(\varphi - \psi) &= f - g, \end{aligned}$$

d'où, par intégration,

$$(8) \quad \psi - \kappa = \Omega_x + \bar{g} - \bar{h}, \quad \kappa - \varphi = \Omega_y + \bar{h} - \bar{f}, \quad \varphi - \psi = \Omega_z + \bar{f} - \bar{g},$$

les fonctions $\Omega_x = \Omega_x(x, y, z)$, $\Omega_y = \Omega_y(x, y, z)$ et $\Omega_z = \Omega_z(x, y, z)$ étant harmoniques

$$(9) \quad \Delta\Omega_x = \Delta\Omega_y = \Delta\Omega_z = 0$$

et les fonctions en deux variables $\bar{f} = \bar{f}(y, z)$, $\bar{g} = \bar{g}(z, x)$, $\bar{h} = \bar{h}(x, y)$ vérifiant les équations

$$(9') \quad \Delta\bar{f} = f, \Delta\bar{g} = g, \Delta\bar{h} = h.$$

En sommant les relations (8), l'on observe qu'on doit avoir la relation

$$(10) \quad \Omega_x + \Omega_y + \Omega_z = 0,$$

d'où il résulte que

$$(11) \quad \Omega_x = \omega_y - \omega_z, \Omega_y = \omega_z - \omega_x, \Omega_z = \omega_x - \omega_y,$$

avec $\omega_x = \omega_x(x, y, z)$, $\omega_y = \omega_y(x, y, z)$, $\omega_z = \omega_z(x, y, z)$; tenant compte de (9) et (11), l'on peut écrire

$$(12) \quad \Delta\omega_x = \Delta\omega_y = \Delta\omega_z = \Delta\omega$$

où $\omega = \omega(x, y, z)$. On obtient avec aisance

$$(13) \quad \omega_x = \omega + \bar{\omega}_x, \omega_y = \omega + \bar{\omega}_y, \omega_z = \omega + \bar{\omega}_z,$$

où les fonctions $\bar{\omega}_x = \bar{\omega}_x(x, y, z)$, $\bar{\omega}_y = \bar{\omega}_y(x, y, z)$ et $\bar{\omega}_z = \bar{\omega}_z(x, y, z)$ sont harmoniques

$$(13') \quad \Delta\bar{\omega}_x = \Delta\bar{\omega}_y = \Delta\bar{\omega}_z = 0.$$

Tenant compte de (11) et (13), les relations (8) conduisent à

$$(14) \quad \varphi = \Omega + \bar{\omega}_x + \bar{f}, \psi = \Omega + \bar{\omega}_y + \bar{g}, \chi = \Omega + \bar{\omega}_z + \bar{h},$$

où la fonction $\Omega = \Omega(x, y, z)$ est arbitraire; les composantes (6) du déplacement seront donc données par

$$(6') \quad u = \frac{\partial\Omega}{\partial x} + \frac{\partial\bar{\omega}_x}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial\Omega}{\partial y} + \frac{\partial\bar{\omega}_y}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial\Omega}{\partial z} + \frac{\partial\bar{\omega}_z}{\partial z}.$$

Les conditions (13') nous montrent que les fonctions $\chi_x = \chi_x(x, y, z)$, $\chi_y = \chi_y(x, y, z)$, $\chi_z = \chi_z(x, y, z)$, précisées par

$$(15) \quad \frac{1}{2G} \chi_x = \frac{\partial\bar{\omega}_x}{\partial x}, \quad \frac{1}{2G} \chi_y = \frac{\partial\bar{\omega}_y}{\partial y}, \quad \frac{1}{2G} \chi_z = \frac{\partial\bar{\omega}_z}{\partial z},$$

sont aussi harmoniques

$$(15') \quad \Delta\chi_x = \Delta\chi_y = \Delta\chi_z = 0,$$

G étant le modul d'élasticité transversale.

Observons encore que, étant données les fonctions harmoniques χ_x , χ_y , χ_z , on peut vérifier les relations

$$(16) \quad \Delta(x\chi_x) = 2\frac{\partial\chi_x}{\partial x}, \quad \Delta(y\chi_y) = 2\frac{\partial\chi_y}{\partial y}, \quad \Delta(z\chi_z) = 2\frac{\partial\chi_z}{\partial z}.$$

En posant la condition que les fonctions (14) vérifient les équations (4') et en tenant compte de (9'), (13') et (15), il résulte l'équation que doit vérifier la fonction Ω

$$(17) \quad 2G\Delta\Omega = -\frac{1}{2(1-\mu)} \left(\frac{\partial\chi_x}{\partial x} + \frac{\partial\chi_y}{\partial y} + \frac{\partial\chi_z}{\partial z} \right);$$

l'on obtient ainsi

$$(18) \quad 2G\Omega = -\frac{1}{4(1-\mu)} (\chi_0 + x\chi_x + y\chi_y + z\chi_z),$$

où l'on a tenu compte de (16) et l'on a introduit la fonction harmonique $\chi_0 = \chi_0(x, y, z)$

$$(19) \quad \Delta\chi_0 = 0.$$

Enfin, les relations (6') vont nous conduire à la représentation Papkovitch-Neuber des composantes du vecteur déplacement

$$(20) \quad \begin{aligned} 2Gu &= \chi_x - \frac{1}{4(1-\mu)} \frac{\partial\chi}{\partial x}, \\ 2Gv &= \chi_y - \frac{1}{4(1-\mu)} \frac{\partial\chi}{\partial y}, \\ 2Gw &= \chi_z - \frac{1}{4(1-\mu)} \frac{\partial\chi}{\partial z}, \end{aligned}$$

où l'on a introduit la notation

$$(21) \quad \chi = \chi_0 + x\chi_x + y\chi_y + z\chi_z,$$

les quatre fonctions $\chi_0, \chi_x, \chi_y, \chi_z$ étant harmoniques, d'après les équations (15') et (19). Ces fonctions potentiel de déplacement doivent être de la classe C^3 .

Tenant compte de la démonstration donnée pour ce résultat, en partant des équations de Lamé, pas à pas jusqu'au résultat final, il résulte que cette représentation est complète pour un domaine simplement connexe; dans le cas d'un domaine multiplement connexe on doit ajouter d'autres termes.

7. On va introduire les fonctions $\Gamma'_x = \Gamma'_x(x, y, z)$, $\Gamma'_y = \Gamma'_y(x, y, z)$, $\Gamma'_z = \Gamma'_z(x, y, z)$ et $\Gamma''_x = \Gamma''_x(x, y, z)$, $\Gamma''_y = \Gamma''_y(x, y, z)$, $\Gamma''_z = \Gamma''_z(x, y, z)$ à l'aide des relations

$$(22) \quad \chi_x = \frac{\partial\Gamma'_x}{\partial x}, \quad \chi_y = \frac{\partial\Gamma'_y}{\partial y}, \quad \chi_z = \frac{\partial\Gamma'_z}{\partial z},$$

$$(22') \quad \chi_0 = \frac{\partial\Gamma'_x}{\partial x} + \frac{\partial\Gamma'_y}{\partial y} + \frac{\partial\Gamma'_z}{\partial z} + \Gamma''_x + \Gamma''_y + \Gamma''_z.$$

En admettant que les fonctions ci-dessus sont harmoniques

$$(23) \quad \Delta\Gamma'_x = \Delta\Gamma'_y = \Delta\Gamma'_z = 0,$$

$$(23') \quad \Delta\Gamma''_x = \Delta\Gamma''_y = \Delta\Gamma''_z = 0,$$

il résulte, d'après la formule (3), que les fonctions $\Gamma_x = \Gamma_x(x, y, z)$, $\Gamma_y = \Gamma_y(x, y, z)$ et $\Gamma_z = \Gamma_z(x, y, z)$, précisées par

$$(24) \quad \Gamma_x = \Gamma'_x + x\Gamma''_x, \quad \Gamma_y = \Gamma'_y + y\Gamma''_y, \quad \Gamma_z = \Gamma'_z + z\Gamma''_z,$$

sont biharmoniques

$$(25) \quad \Delta\Delta\Gamma_x = \Delta\Delta\Gamma_y = \Delta\Delta\Gamma_z = 0.$$

En utilisant des relations de la forme (16), la représentation (20) de Papkovitch-Neuber prend la forme

$$(26) \quad \begin{aligned} 2Gu &= 2(1 - \mu) \Gamma_x - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial\Gamma_x}{\partial x} + \frac{\partial\Gamma_y}{\partial y} + \frac{\partial\Gamma_z}{\partial z} \right), \\ 2Gv &= 2(1 - \mu) \Gamma_y - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial\Gamma_x}{\partial x} + \frac{\partial\Gamma_y}{\partial y} + \frac{\partial\Gamma_z}{\partial z} \right), \\ 2Gw &= 2(1 - \mu) \Gamma_z - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial\Gamma_x}{\partial x} + \frac{\partial\Gamma_y}{\partial y} + \frac{\partial\Gamma_z}{\partial z} \right); \end{aligned}$$

c'est la représentation de G. B. Galerkin, qui utilise trois fonctions biharmoniques, composantes du vecteur ainsi nommé de Galerkin. Évidemment que la démonstration précédente assure aussi la complétude de cette représentation. Ces fonctions potentiel de déplacement doivent être de la classe C^4 .

8. On peut obtenir une variante de la démonstration donnée au point 6 en utilisant la propriété suivante: Soit une équation différentielle aux dérivées partielles de la forme

$$(27) \quad D_1 F_1 = D_2 F_2,$$

où D_1, D_2 sont des opérateurs différentiels permutables

$$(28) \quad D_1 D_2 = D_2 D_1$$

et premiers entre eux; les fonctions $F_1 = F_1(x, y, z)$ et $F_2 = F_2(x, y, z)$ s'écrivent sous la forme

$$(29) \quad F_1 = D_2 F, \quad F_2 = D_1 F,$$

où $F = F(x, y, z)$.

C'est ainsi que les équations de Lamé (4) conduisent à

$$(30) \quad \begin{aligned} u &= \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad -\frac{1}{1-2\mu} \theta = \Delta\varphi, \\ v &= \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad -\frac{1}{1-2\mu} \theta = \Delta\psi, \\ w &= \frac{\partial\chi}{\partial z}, \quad -\frac{1}{1-2\mu} \theta = \Delta\chi; \end{aligned}$$

il faut donc avoir

$$(31) \quad \Delta\psi = \Delta\varphi = \Delta\kappa = \Delta\Omega,$$

d'où il résulte

$$(32) \quad \varphi = \Omega + \bar{\omega}_x, \quad \psi = \Omega + \bar{\omega}_y, \quad \kappa = \Omega + \bar{\omega}_z,$$

$\bar{\omega}_x, \bar{\omega}_y, \bar{\omega}_z$ étant les fonctions harmoniques (13'). On observe qu'on a utilisé la même notation qu'au point 6; d'ailleurs, la démonstration s'ensuit comme au point mentionné.

9. Dans une solution en tensions du problème on peut utiliser une méthode analogue; en partant ainsi des équations de Beltrami concernant les tensions normales, dans l'absence des forces volumiques,

$$(33) \quad \begin{aligned} \Delta\sigma_x + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) &= 0, \\ \Delta\sigma_y + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) &= 0, \\ \Delta\sigma_z + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) &= 0, \end{aligned}$$

l'on obtient la représentation

$$(34) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= \Delta F_x - \frac{1}{2+\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (F_x + F_y + F_z), \\ \sigma_y &= \Delta F_y - \frac{1}{2+\mu} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (F_x + F_y + F_z), \\ \sigma_z &= \Delta F_z - \frac{1}{2+\mu} \frac{\partial^2}{\partial z^2} (F_x + F_y + F_z), \end{aligned}$$

que nous avons donné dans [29]. Les fonctions $F_x = F_x(x, y, z)$, $F_y = F_y(x, y, z)$ et $F_z = F_z(x, y, z)$ doivent être biharmoniques

$$(35) \quad \Delta\Delta F_x = \Delta\Delta F_y = \Delta\Delta F_z = 0$$

de la classe C^4 .

10. Des considérations analogues peuvent être faites pour les problèmes dynamiques de la théorie de l'élasticité.

Reçu le 30 août 1969

BIBLIOGRAPHIE

1. E. Almansi: Sulle deformazioni delle piastre elastiche, Rend. R. Accad. dei Lincei, Cl. Sci. fis., mat. e nat., serie 6 tom 17, fasc. 1, 1933, p. 12.
2. В. И. БЛОХ: О представлении общего решения основных уравнений статической задачи теории упругости изотропного тела при помощи гармонических функций, Прикл. мат. и мех., том. 22, no. 4, 1958.
3. C. I. Borş: Sur les tensions élastiques dans les corps à isotropie transversale, An. şt. Univ. „Al. I. Cuza“, Iaşi, ser. nouă, sect. I, Mat., tom X, no. 2, 1964, p. 445.
4. J. V. Boussinesq: Étude nouvelle sur l'équilibre et le mouvement des corps solides élastiques dont certaines dimensions sont très petites par rapport à d'autres, J. Math. Pures et Appl., tom 16, 1871.
5. J. V. Boussinesq: Applications des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des corps élastiques, avec des notes étendues sur divers points de physique mathématique et d'analyse, Gauthier-Villars, Paris, 1885.
6. Ф. С. Чуриков: Об одной форме общего решения уравнений равновесия теории упругости в перемещениях, Прикл. мат. и мех., том. 17, no. 6, 1953, p. 751.
7. R. A. Eubanks, E. Sternberg: On the completeness of the Boussinesq-Papkovich stress functions, J. of rational mech. and anal., tom 5, no. 5, 1956, p. 735.
8. G. Fichera: Sull'esistenza delle funzioni potenziali nei problemi della fisica-matematica, Atti Accad. Naz. dei Lincei, Rendiconti, Cl. Sci. fis., mat. e nat., serie VIII, tom II, 1947, p. 527.
9. В. Г. Галеркин: Contribution à la solution générale du problème de la théorie de l'élasticité dans le cas de trois dimensions, C. Rend. hebdomadaire des séances de l'Acad. des Sci., tom 190, no. 18, 1930, p. 1047.
10. Б. Г. Галеркин: К вопросу об исследовании напряжений и деформаций в упругом изотропном теле, Докл. Акад. Наук С.С.С.Р., сер. А, no. 14, 1930, p. 353.
11. Б. Г. Галеркин: К общему решению задачи теории упругости в трех измерениях с помощью функций напряжений и перемещений, Докл. Акад. Наук С.С.С.Р., сер. А, no. 10, 1931, p. 281.
12. Б. Г. Галеркин: Определение напряжений и перемещений в упругом изотропном теле с помощью трех функций, ИЗВ. НИТИ, том. 1, 1931, p. 49.
13. Б. Т. Галеркин: Общее решение уравнений теории упругости для изотропного тела и некоторые приложения этого решения к частным случаям, Вестн. мех. и прикл. мат., том. 2, 1931, p. 3.
14. Т. Д. Гродский: Интегрирование общих уравнений равновесия изотропного упругого тела при помощи пьезоэлектрических потенциалов и гармонических функций, Изд. Акад. Наук С.С.С.С.Р., no. 4, 1935.
15. D. Ionescu: Asupra vectorului lui Galerkin în teoria elasticităţii şi în hidrodinamica fluidelor vîscoase, Bul. şt. Acad. R.P.R., ser. mat., fiz., chim., tom VI, no. 3, 1954, p. 555.
16. А. Ю. Крутков: Тензор функции напряжений и общие решения в статике теории упругости, Академкнига, Москва, 1949.
17. G. Lamé: Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides, Paris 1852.

18. A. E. H. Love: A treatise on the mathematical theory of elasticity, IV th ed., Cambridge University Press, 1934
19. А. И. Лурье: Пространственные задачи теории упругости, Тостехиздат, Москва, 1955.
20. K. Marguerre: Ansätze zur Lösung der Grundgleichungen der Elastizitätstheorie, Z.A.M.M., tom 35, no. 6/7, 1955, p. 242.
21. R. D. Mindlin: Note on the Galerkin and Papkovitch stress functions, Bull. Amer. Math. Soc., tom 42, 1930, p. 373.
22. A. Moisil: Asupra unui vector analog vectorului lui Galerkin pentru echilibrul corpurilor elastice cu izotropie transversă, Bul. șt. Acad. R.P.R., ser. mat., fiz. chim., tom II, no. 3, 1950, p. 207.
23. Gr. C. Moisil: Asupra formulelor lui Galerkin în teoria elasticității, Bul. șt. Acad. R.P.R., ser. A, tom I, no. 6, 1949, p. 587.
24. H. Neuber: Ein neuer Ansatz zur Lösung räumlicher Probleme der Elastizitätstheorie. Der Hohlkegel unter Einzellast als Beispiel, Z.A.M.M., tom 14, 1934, p. 203.
25. P. F. Papkovitch: Solution générale des équations différentielles fondamentales d'élasticité, exprimée par trois fonctions harmoniques, C. Rend. hebdom. des séances de l'Acad. des Sci., tom 195, 1932, p. 513.
26. P. F. Papkovitch: Expressions générales des composantes des tensions, ne renfermant comme fonctions arbitraires que des fonctions harmoniques, C. Rend. hebdom. des séances de l'Acad. des Sci., tom. 195, 1932.
27. М. Г. Слободянский: Общие формы решений уравнений упругости для односвязных и многосвязных областей, выраженные через гармонические функции, Прикл. мат. и мех., tom. 18, no. 1, 1954, p. 55.
28. L. Solomon: Funcții potențial de deplasare pentru ecuațiile echilibrului elastic. Bul. șt. Acad. R.P.R., secț. șt. mat. și fiz, tom IX, no. 2, 1957, p. 415.
29. P. P. Teodorescu: Sur une solution générale du problème en espace de la théorie de l'élasticité, IX^{me} Congrès Intern. de Méc. Appl., Bruxelles, Sept. 1956, Actes, tom V, 1957, p. 155.
30. W. Thomson (lord Kelvin): Mathematical and physical papers, I, 1882; II, 1884; III, 1890.
31. A. Timpe: Achsensymmetrische Deformation von Umdrehungskörpern, Z.A.M.M., tom 4, 1924, p. 361.
32. E. Trefftz: Mathematische Elastizitätstheorie. Mechanik der elastischen Körper, Handbuch der Physik, tom VI, Springer-Verlag, Berlin, 1928.

ZUR PARABOLISCHE METHODE IN DER SCHALLNAHEN, INSTATIONÄREN STRÖMUNG.

S. TURBATU

1. Es ist bekannt, daß eine der Haupteigenschaften des schallnahen Gebietes besteht darin, daß die auftretende Potentialgleichung bei der Machzahl $M_\infty = 1$ vom elliptischen zum hyperbolischen Typ übergeht. Jede Näherungsmethode musste also versuchen diesen Übergang wiederzugeben. Nach Oswatitsch und Keune [8] wird Φ_{xx} konstant gesetzt. Damit wird der Typenwechsel derart erfasst, daß man weder eine Differentialgleichung vom elliptischen Typ noch eine vom hyperbolischen Typ zu lösen hat, sondern das Problem auf eine parabolische Differentialgleichung zurückführt. Diese Methode, die die parabolische Methode genannt wird, wurde zunächst von Behrbohm mit Erfolg auf die Berechnung der Strömung in der Lavaldüse angewendet. Später haben Keune und Oswatitsch die Umströmung des mit Schallgeschwindigkeit angeströmten Rotationshalbkörpers nach diesem Verfahren bestimmt. Weitere Anwendungen stammen von Spreiter, Alksne, Maeder, Thommen, Keune, Romberg, Hosokawa, Zierep, u.a.

Eine Erweiterung der parabolischen Methode zur Beschreibung kleiner Störungen einer schallnahen Strömung wurde von Evans [4] gegeben. Die zweimalige Ableitung des Potentials in Hauptströmungsrichtung Φ_{xx} wird vorübergehend nicht als konstant, sondern als eine Funktion von x angesetzt.

Einen Beitrag über den Fehler der parabolischen Methode wurde — im Falle der stationären Strömung — von Zierep in [4] gegeben.

In der vorliegenden Arbeit wird die parabolische Methode für die instationäre, schallnahe Strömung benutzt, um nicht das Potential zu einem vorgegebenen Profil zu bestimmen, sondern — wie Zierep [1] und Randall [9] — wir kehren die Fragestellung um. Wir suchen die Körperkontur, die mit der parabolischen Methode zu einer bekannten Geschwindigkeitsverteilung auf dem Körper führt. Ansschliessend wird einen Vergleich der beiden Konturen — im Falle der stationären und instationären Strömung — bei derselben linearen Geschwindigkeitsverteilung auf dem Profil angegeben.

2. Es sei hier lediglich der Fall der instationären, ebenen, schallnahen Strömung um ein Profil betrachtet. Unter der Voraussetzung, daß Reibung

und Wärmeleitung vernachlässigt werden, und das keine starken Verdichtungsstöße auftreten, kann die Strömung durch ein Geschwindigkeitspotential beschrieben werden. Die Theorie kleiner Störungen liefert dann in Schallnähe eine nichtlineare Potentialgleichung:

$$(1) \quad [1 - M_\infty^2 - M_\infty^2(\gamma + 1) \Phi_x] \Phi_{xx} + \Phi_{zz} - 2M_\infty^2 \Phi_{xt} - M_\infty^2 \Phi_{tt} = 0.$$

M_∞ ist die Machzahl der Anströmung, γ das Verhältnis der spezifischen Wärmen. Bezüglich der genauen Ableitung dieser Gleichung sei auf das Buch von M. T. L a n d a h l [6] hingewiesen. Zur Lösung von Gleichung (1) sei ein Störungsansatz gewählt [11], der Nachbarlösungen gegenüber der stationären Strömung erfasst:

$$(2) \quad \Phi(x, z, t) = \chi(x, z) + \varphi(x, z) e^{ikt}.$$

Darin bedeutet k die reduzierte Frequenz. Die Amplitudenfunktion φ soll nur in erster Ordnung berücksichtigt werden. Setzt man gleichzeitig noch $M_\infty = 1$ ein, so findet man als Differentialgleichung für φ :

$$(3) \quad -(\gamma + 1) \chi_x \varphi_{xx} - \tau \varphi_x + \varphi_{zz} - 2ik\varphi_x + k^2\varphi = 0,$$

wobei

$$\tau = (\gamma + 1) \chi_{xx}$$

ist. Das stationäre Strömungsfeld ist nach der parabolischen Methode berechnet worden [8], [10], [14]. Auf die Darstellung dieser Methode soll nicht eingegangen werden, dafür sei es auf der angegebenen Literatur verwiesen. τ hängt von der Beschleunigung ab und soll nach [8] konstant gesetzt werden, so daß

$$(4) \quad \chi_{xx}(x, +0) = \frac{\tau}{\gamma + 1} = \beta = \text{const.}$$

ist. Für die Lösung der Gleichung (3) sei das erste Glied vernachlässigt. Eine Begründung dafür wurde in [11] näher diskutiert. Man erhält sodann eine lineare, parabolische Differentialgleichung

$$(5) \quad \varphi_{zz} - \lambda \varphi_x + k^2\varphi = 0$$

mit

$$(6) \quad \lambda = \tau + 2ik$$

Die Körperoberfläche sei durch $z = h(x)$ gegeben. Damit lauten die Randbedingungen [11]

$$(7) \quad \begin{cases} \varphi_z(x, +0) = \begin{cases} g(x) = \frac{dh}{dx} + ikh & \text{für } x \geq 0; \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases} \\ \varphi_x = \varphi_z = 0 & \text{für } x \rightarrow -\infty \text{ und } |z| \rightarrow +\infty, \end{cases}$$

wobei die Funktion $h \in C^1([0, +\infty))$. Der Flügel erstreckte sich dabei auf die Nachbarschaft von $z = 0$. Da nur Strömungen ohne Verdichtungsstöße betrachtet werden sollen, sind keine zusätzliche Randbedingungen an Stoßfronten zu erfüllen. Das Profil wird als symmetrisch zur x -Achse gelegen betrachtet. Daher braucht man nur das Feld $z \geq 0$ zu berechnen.

Die Lösung des Randwertproblems kann für ein schwingendes Profil direkt angegeben werden. Man erhält nach [11] und [12]

$$(8) \quad \varphi(x, z) = -\frac{1}{\sqrt{\pi\lambda}} \int_0^x (x - \xi)^{-1/2} \cdot \exp\left[\frac{k^2}{\lambda}(x - \xi) - \frac{\lambda z^2}{4(x - \xi)}\right] g(\xi) d\xi$$

Diese Lösung stellt eine Integralrelation zwischen den Werten von $\varphi(x, z)$ und $\varphi_z(x, +0)$ dar. Damit ist eine allgemeine Formel gegeben, die die Berechnung aller gewünschten Größen erlaubt. Für $z \rightarrow +0$ erhält man aus (8) auf dem Profil unmittelbar die Beziehung.

$$(9) \quad \varphi(x, +0) = -\frac{1}{\sqrt{\pi\lambda}} \int_0^x g(\xi) (x - \xi)^{-1/2} \cdot \exp\left[\frac{k^2}{\lambda}(x - \xi)\right] d\xi$$

Nun bestimmen wir nicht das Potential φ zu einem vorgegebenen Profil, sondern — wie Zierp [14] und Randall [9] — wir kehren die Fragestellung um: wir suchen die Körperkontur, die mit der parabolischen Methode zu einer bekannten Geschwindigkeitsverteilung auf dem Körper führt. Besonders bevorzugt ist in diesem Zusammenhang die lineare Geschwindigkeitsverteilung, weil in diesem Fall eine exakte Lösung des Problems vorliegt.

Die lineare Geschwindigkeit lautet:

$$(10) \quad \varphi_x(x, +0) = ax + b, \quad b \geq 0.$$

Aus (10) folgt nun

$$(11) \quad \varphi(x, +0) = \frac{a}{2} x^2 + bx + c.$$

Dabei wird vorausgesetzt, daß $\varphi(0, 0) = 0$ ist. In diesem Fall $c = 0$ ist, so daß aus (11) erhält man

$$(12) \quad \varphi(x, +0) = \frac{a}{2} x^2 + bx.$$

Setzt man die Beziehung (12) in die Formel (9) ein, so ergibt sich die Gleichung:

$$(13) \quad f(x) = \int_0^x g(\xi) (x - \xi)^{-1/2} \cdot \exp[\sigma(x - \xi)] d\xi$$

mit

$$(14) \quad f(x) = -\sqrt{\pi\lambda} \left(\frac{a}{2} x^2 + bx \right) \quad \text{und} \quad \sigma = \frac{k^2}{\lambda}$$

Die Beziehung (13) ist eine singuläre Integralgleichung für die gesuchte Funktion g . Zur Lösung von solchen Integralgleichungen vom Faltungstypus mit den endlichen Grenzen 0 und x , lassen sich die Operatorenrechnung von Mikusinski [1], [2] und die Distributionen Theorie [3], [13] mit Erfolg anwenden. Nach [13] erhält man die Lösung der singulären Integralgleichung (13) unter der Form

$$(15) \quad g(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^x \xi^{-3/2} \cdot e^{\sigma x} f(x - \xi) d\xi$$

Unter Beachtung der Beziehung (14) lässt sich (15) auch in der Form

$$(16) \quad g(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \left[\frac{a}{2} \int_0^x \xi^{-3/2} e^{\sigma x} (x - \xi)^2 d\xi + \right. \\ \left. + b \int_0^x \xi^{-3/2} (x - \xi) e^{\sigma x} d\xi \right]$$

schreiben. Die Integrale lassen sich berechnen [5]

$$\int_0^x \xi^{-3/2} (x - \xi)^2 e^{\sigma x} d\xi = -2x^{3/2} e^{\sigma x} + 4x^{3/2} (\sigma x - 1)_1 F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \sigma x\right) + \\ + \frac{2}{3} x^{3/2} {}_1 F_1\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}; \sigma x\right);$$

$$\int_0^x \xi^{-3/2} (x - \xi) e^{\sigma x} d\xi = -2x^{1/2} e^{\sigma x} + 2x^{1/2} (2\sigma x - 1)_1 F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \sigma x\right)$$

wobei ${}_1F_1(\alpha, \mu; z)$ die Kummerische Funktion ist [5], so daß unter Beachtung von (7) die Formel (16) folgende Gestalt annimmt:

$$(17) \quad \frac{dh}{dx} + ikh = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \left[ax^{3/2} e^{\sigma x} + 2bx^{1/2} e^{\sigma x} - \right. \\ \left. - \{2ax^{3/2}(\sigma x - 1) + 2bx^{1/2}(2\sigma x - 1)\}_1 F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \sigma x\right) - \right. \\ \left. - \frac{a}{3} x^{3/2} {}_1 F_1\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}; \sigma x\right) \right].$$

Das ist eine Differentialgleichung erster Ordnung im komplexen Gebiet. Nach dem Existenz- und Eindeigkeitsatz der Lösung im komplexen Gebiet [7] suchen wir eine analytische Funktion h von x zu bestimmen, welche für $x = 0$ den Wert $h(0) = 0$ annimmt und der Differentialgleichung (17) genügt. Die in der Umgebung von $x = 0$ reguläre Funktion h lässt sich in eine Potenzreihe von x entwickeln:

$$(18) \quad h(x) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v x^{v + \frac{1}{2}},$$

deren Koeffizienten sich aus der Differentialgleichung (17) berechnen lassen. Aus (18) folgt:

$$(19) \quad h'(x) = \sum_{v=0}^{\infty} \left(v + \frac{1}{2}\right) a_v x^{v - \frac{1}{2}}.$$

Mit (18), (19) und den Entwicklungen [5]

$$(20) \quad {}_1F_1(\alpha, \mu; z) = 1 + \frac{\alpha}{\mu} \cdot \frac{z}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\mu(\mu+1)} \cdot \frac{z^2}{2!} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\mu(\mu+1)(\mu+2)} \cdot \frac{z^3}{3!} + \dots,$$

$$(21) \quad e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

ist sowohl die linke als auch die rechte Seite der Gleichung (17) eine Potenzreihe von x . Durch Einsetzen der Formeln (18), (19), (20) und (21) in die Differentialgleichung (17) ergibt sich

$$(22) \quad \sum_{v=0}^{\infty} a_v \left(v + \frac{1}{2} \right) x^{v - \frac{1}{2}} + ik \sum_{v=0}^{\infty} a_v x^{v + \frac{1}{2}} = \\ = Ax^{1/2} + Bx^{3/2} + Cx^{5/2} + \dots$$

Hier sind

$$(23) \quad A = -2b \sqrt{\frac{\bar{\lambda}}{\pi}}; \\ B = -\frac{1}{2} \left(\frac{8}{3} a - \frac{4}{3} b\sigma \right) \sqrt{\frac{\bar{\lambda}}{\pi}}; \\ C = \frac{1}{2} \left(\frac{8}{15} a\sigma + \frac{4}{3} b\sigma^2 \right) \sqrt{\frac{\bar{\lambda}}{\pi}}; \\ \dots\dots\dots$$

Die Vergleichung der Koeffizienten von x auf beiden Seiten der Gleichung (22) gibt dann

$$(24) \quad a_0 = 0; \\ a_1 = 2/3 A; \\ a_2 = 2/5 (B - ika_1); \\ a_3 = 2/7 (C - ika_2); \\ \dots\dots\dots$$

so daß die Differentialgleichung (17) die Lösung

$$(25) \quad h(x) = -\frac{4}{3} b \sqrt{\frac{\bar{\lambda}}{\pi}} x^{3/2} + \sqrt{\frac{\bar{\lambda}}{\pi}} \left(\frac{8}{30} b\sigma + \frac{16}{17} \cdot \frac{ikb}{2} - \right. \\ \left. - \frac{16}{30} a \right) x^{5/2} + \left\{ \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\bar{\lambda}}{\pi}} \left[\left(\frac{2}{35} \sigma + \frac{4}{35} ik \right) a + \left(\frac{\sigma^2}{7} - \frac{2}{55} ik\sigma + \frac{8}{35} k^2 \right) b \right] \right\} x^{7/2} + \dots$$

hat. Für dieses Profil liefert also die parabolische Methode eine lineare Geschwindigkeit auf dem Körper.

3. Um den Anschluß an bekannte Formel von Zier ep [14] der stationären Theorie zu haben, sei in (25) $k = 0$ gesetzt.

In diesem Falle findet man:

$$(26) \quad \tilde{h}(x) = - \sqrt{\frac{a(\gamma+1)}{\pi}} \cdot \frac{4}{3} x^{3/2} \left(\frac{2}{5} ax + b \right).$$

Für den Fall, daß $a = \beta$ gesetzt wird, geht (26) in den Ausdruck (2.3) der stationären Theorie von Zier ep [14] über. Um in diesem Fall einen Vergleich mit der Formel (2.3) von Zier ep [14] zu haben, sei noch $k = -i$ gesetzt, so daß nach (6) und (14)

$$\lambda = 2 + \beta(\gamma + 1); \quad \sigma = \frac{-1}{2 + \beta(\gamma + 1)}$$

sind. Durch Einsetzung diesen Ausdrücken in die Formeln (25), (26) erhält man:

$$(27) \quad h(x) = - \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2 + \beta(\gamma + 1)}{\pi}} b x^{3/2} + \\ + \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2 + \beta(\gamma + 1)}{\pi}} \left(\frac{2}{5} b - \frac{2}{5} \beta - \frac{b}{10 + 5 \beta(\gamma + 1)} \right) x^{5/2} + \dots$$

und

$$(28) \quad \tilde{h}(x) = - \sqrt{\frac{\beta(\gamma + 1)}{\pi}} \cdot \frac{4}{3} x^{3/2} \left(\frac{2}{5} \beta x + b \right).$$

Der Vergleich zwischen (27) und (28) zeigt, daß die x - Abhängigkeit der beiden Profile verschieden ist, un zwar:

$$(29) \quad h(x) = \sqrt{1 + \frac{2}{\beta(\gamma + 1)}} \cdot \tilde{h}(x) + \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2 + \beta(\gamma + 1)}{\pi}} \cdot \left[\frac{2}{5} b - \right. \\ \left. - \frac{b}{10 + 5 \beta(\gamma + 1)} \right] x^{5/2} + \dots$$

ist.

Beschränkt man sich auf erste Näherung, so lautet die Formel:

$$(30) \quad h(x) \cong \sqrt{1 + \frac{2}{\beta(\gamma + 1)}} \cdot \tilde{h}(x).$$

Dieses Ergebnis ist recht bemerkenswert. Die Formel zeigt, daß in der ersten Näherung die x — Abhängigkeit der beiden Profile dieselbe ist ; einzig und allein ist der Zahlenfaktor verschieden.

Eingegangen am 25. März 1969

L I T E R A T U R

- [1] Berg, L.: Einführung in die Operatorenrechnung, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1965).
- [2] Butzer, L. P.: Die Anwendung des Operatoren kalküls von Jan Mikusinski auf lineare Integralgleichung vom Faltungstyp, Archive for Rational Mechanics and Analysis, Bd. 2, 2 S 114—128 (1958).
- [3] Cristescu, R. und Marinescu, G. h.: Unele aplicații ale teoriei distribuțiilor, Ed. Academiei R.S.R., București (1966).
- [4] Evans, T.: The parabolic equation approximation in transonic flow, ZAMP, Bd. 17, 2, S. 216—226 (1966).
- [5] Градштейн, И. С. und Рыжик, И. М.: Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Гос. изд. ФМ., Москва, С. 36, 1072 (1963).
- [6] Landahl, M. T.: Unsteady transonic flow, Pergamon-Press, Oxford — London — New York — Paris, S. 1—23 (1961).
- [7] Marinescu, G. h.: Teoria ecuațiilor diferențiale și integrale, Ed. didactică și pedagogică, S. 96, București (1963).
- [8] Oswatitsch, K. und Keune, F.: The flow around bodies of revolution at Mach-number 1, Proceedings of the High-Speed Conference at the Polytechnic Institute, Brooklyn, N. Y., Januar (1955).
- [9] Randal, D. G.: A.R.C.C.P. 456 London (1959).
- [10] Spreiter, J. R. und Alksne, A.: Thin airfoil theory based on approximate solution of the transonic flow equation, NACA TN 3970 (1957).
- [11] Teipel, I.: Die instationären Luftkräfte bei der Machzahl 1, Zeitschrift für Flugwissenschaften, Bd. 2, Heft 1, S. 1—14 (1964).
- [12] Turbatu, S.: Asupra potențialului vitezelor în mișcarea transonică nestationară plană, Analele Univ. Buc. Seria Științele Naturii, Mat.-Mec., Anul 14, S. 143—146 (1965).
- [13] Zemanian, A. H.: Distribution theory and transform analysis, Mc.Graw-Hill, S. 212—292 (1965).
- [14] Ziererp, J.: Schallnahe Strömung (Beiträge zur parabolischen Methode), ZAMM, Bd. 43 S. T. 182—187 (1963).



Coli tipo 9



Intreprinderea Poligrafică
„13 Decembrie 1918”
București
Republica Socialistă România
Comanda nr. 110